МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СИСТЕМНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# Основные понятия и алгоритмы группового анализа дифференциальных уравнений

## Конспект лекций

В.Р.ДУШИН, М.Н.СМИРНОВА

Москва - 2019

УДК 532.5.011
ББК 22.25

Рецензенты:
**А.Б. Киселев** – доктор физико-математических наук, профессор
**С.Г. Вольпин** – кандидат технических наук, заведующий отделом

**В.Р. Душин, М.Н. Смирнова.** ***Основные понятия и алгоритмы группового анализа дифференциальных уравнений***. *Учебное пособие.* – Москва: Изд-во ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2019. – 64 с.

Учебное пособие знакомит с о*сновными понятиями и алгоритмами группового анализа дифференциальных уравнений.*

Книга представляет собой конспект курса лекций, читавшихся авторами в различные годы на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова и на кафедре высокопроизводительных вычислений МГУ имени М.В.Ломоносова. Для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по специальностям механика, математическое моделирование.

Издание подготовлено редакционно-издательским отделом ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН
Начальник отдела – В.Е.Текунов. Редактор издания – А.Н.Никонова.



ISBN 978-5-93838-081-3

*Основные понятия и алгоритмы группового анализа дифференциальных уравнений*

*Введение*

Групповым свойством системы дифференциальных уравнений $S$ называется свойство этой системы оставаться неизменной, когда зависимые и независимые переменные подвергаются преобразованиям некоторой группы преобразований $G$. Если это свойство имеет место, то говорят, что система $S$ допускает группу $G$ (или говорят, что $S$ инвариантна относительно группы $G$). Значение группового свойства для интегрирования системы $S$ обусловлено тем, что под действием преобразования из $G$ любое решение системы $S$ переходит снова в решение этой же системы. Это позволяет использовать групповое свойство для построения различных классов частных решений системы $S$, отыскание которых сводится к интегрированию более простых систем уравнений. Кроме того, групповое свойство является признаком, по которому можно осуществить определенную классификацию систем $S$.

Общая проблема исследования групповых свойств дифференциальных уравнений была поставлена и изучена во второй половине 19 века (1885-1895 гг. – основные публикации) норвежским математиком Софусом Ли. Само понятие непрерывной группы преобразований первоначально возникло у Ли в связи с изучением методов интегрирования отдельных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Ли и его учениками был разработан аналитический алгоритм и изучен широкий круг приложений теории непрерывных групп преобразований.

К сожалению, в дальнейшем этот раздел математики оказался забытым и остался в стороне от главных путей развития теории дифференциальных уравнений. Это было вызвано, по-видимому, следующими обстоятельствами: 1) «произвольная» система дифференциальных уравнений с частными производными не допускает никакой нетривиальной группы (не состоящей из одного тождественного преобразования); 2) хотя обыкновенные дифференциальные уравнения всегда допускают нетривиальную группу, задача отыскания этой группы оказывается равносильной задаче интегрирования самой системы; 3) вся теория Ли групповых свойств дифференциальных уравнений является, по существу, локальной теорией, неспособной непосредственно исследовать решения конкретных задач с произвольными дополнительными условиями. Эта теория изучает в основном только групповую структуру совокупности всех решений системы $S$ в окрестности некоторой точки.

Однако в прикладных областях эта теория оказалась весьма плодотворной, т.е. многие дифференциальные уравнения конкретного вида допускают нетривиальную группу. Например, уравнения газовой динамики, уравнения гидродинамики (Эйлера, пограничного слоя, уравнения Навье - Стокса), уравнения теории упругости и пластичности, теории горения и детонации, магнитной гидродинамики и других прикладных физических теорий.

Трудность построения решений конкретных задач в этих теориях обусловлена главным образом либо нелинейностью уравнений, либо большим числом переменных (а чаще всего и тем и другим). Поэтому получили широкое распространение исследования, опирающиеся на знание отдельных классов частных решений. Например, «плоские» и «одномерные» (с различными видами симметрии) решения; решения типа «простых волн» в газовой динамике; функционально-инвариантные решения В. И. Смирнова и С. Л. Соболева для волновых уравнений; автомодельные решения уравнений гидродинамики и т. д.

В предложенных лекциях будут рассмотрены следующие основные задачи теории групповых свойств дифференциальных уравнений:

1.Понятие групп Ли точечных преобразований. Понятие инфинитезимального оператора групп Ли и соответствующий алгоритм Ли. Теорема Ли о восстановлении по инфинитезимальному оператору преобразований группы Ли в конечном виде. Теория продолжения точечных преобразований. Примеры конкретных преобразований и их продолжения. Инвариантные многообразия и критерии их инвариантности. Понятие основной группы, допускаемой системой дифференциальных уравнений, и системы определяющих уравнений для её вычисления (которые для части конкретных задач эффективно доводятся до конца).

2. Использование найденной группы $G$ для системы дифференциальных уравнений $S$ с целью построения классов частных решений этой системы (так называемых инвариантных и частично-инвариантных решений). Действия преобразований найденной группы $G$ на множестве решений исследуемой системы дифференциальных уравнений $S$. Формулы производства решений.

3. Групповая классификация системы дифференциальных уравнений $S$ с произвольным элементом по отношению к этому произвольному элементу (где в качестве произвольного элемента может выступать, например, заранее неизвестный числовой параметр или же заранее неизвестная функция, как, например, градиент давления в правой части системы уравнений пограничного слоя).

## *1. Определения и понятия теории групп Ли*

*Определение.* Группой $G=(M,*)$ называется множество элементов $M$ с бинарной операцией “ * ” между элементами множества, в которой выполнены следующие свойства:

1. $\forall\, a,b \in G : a*b = c \in G$ - условие замкнутости относительно групповой операции
2. $\exists\, e : \forall\, a \in G : a*e = e*a = a$ - условие существования единичного элемента
3. $\forall\, a \in G\ \exists a^{-1} : a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ - условие существования обратного элемента

*Определение.* Рассмотрим множество преобразований $\{x' = T_a(x)\}$ вида $x' = f(x,a)$, под действием которых точка $x \in R^n$ евклидова пространства $R^n$ переводится в новое положение $x' \in R^n$ того же евклидова пространства $R^n$. Вещественнозначный многомерный групповой параметр $a \in B \subset R^r$ ($B$ - открытый шар с центром в т. $0 \in R^r$, $R^r$ - евклидово пространство) определяет множество (семейство) преобразований, когда пробегает все допустимые значения в некоторой малой окрестности нуля $B$. Полученное множество преобразований $\{x' = T_a(x)\}$ образует локальную группу Ли непрерывных преобразований $G_r = \{T_a, \bullet\}$, где групповой операцией “$\bullet$” является композиция преобразований, если:

1. $T_b \bullet T_a = T_{\varphi(a,b)}$, т. е. $f(f(x,a),b) = f(x,\varphi(a,b))$ - условие замкнутости относительно групповой операции (т. е. композиция преобразований группы вновь является преобразованием группы), где функция $\varphi = \varphi(a,b)$ задает закон умножения в группе преобразований.

2. $T_0 = E$, т. е. $x' = f(x,0) = x$ – условие существования тождественного преобразования, отвечающего значению группового параметра $a = 0$.

3. $\exists\ a^{-1}$: $T_{a^{-1}} \bullet T_a = E = T_a \bullet T_{a^{-1}}$, т. е. $\varphi(a,a^{-1}) = 0 = \varphi(a^{-1},a)$ - условие существования обратного преобразования $T_a^{-1}$, которому отвечает значение параметра $a^{-1}$, так что $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$.

4. Функции $\varphi = \varphi(a,b)$ и $f = f(x,a)$ являются достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Т. к. групповой параметр $a \in R^r$, то группа преобразований $G_r = \{T_a, \bullet\}$ называется локальной *r*-параметрической группой Ли непрерывных преобразований. Если групповой параметр $a \in R^1$,то мы имеем локальную однопараметрическую группу Ли непрерывных преобразований.

<u>Примечания:</u>

1. $a^{-1} \neq \dfrac{1}{a}$.

2. При преобразованиях $\{x' = T_a(x)\}$ преобразуются только точки $x$ евклидова пространства $R^n$, а сама система координат в пространстве не преобразуется.

3. Из свойств 1., 2. следует, что $\varphi(a,0) = a$ и $\varphi(0,b) = b$.

4. Локальная однопараметрическая группа Ли непрерывных преобразований. Локальность означает малую окрестность нуля, в которой лежит диапазон изменения группового параметра $a \in R^1$, непрерывность означает непрерывную зависимость функции $f(x,a)$ от группового параметра $a$. Часто в названии групп Ли непрерывных преобразований добавляют термин точечная (группа Ли непрерывных точечных преобразований), тем самым подчеркивая, что преобразования зависят только от совокупности зависимых, независимых переменных и группового параметра и не зависят от значений их производных.

*<u>Примеры простейших преобразований:</u>*

1. Перенос вдоль оси: $x' = x + a$

а). $T_b$: $x'' = x' + b = x + (a+b) \Rightarrow \varphi(a,b) = a + b$.

б). $a = 0$ – тождественное преобразование.

в). $T_{a^{-1}} = T_{-a} = -T_a$ - обратное преобразование.

Рассмотрим фиксированную точку $x \in R^n$. Множество всех ее образов $x' = T_a(x)$ образует локальное многообразие в $R^n$. Это многообразие называется орбитой точки $x$ ($a \in R^r$). Т. о. орбита точки $x \in R^n$ представляет собой кривую $a \to f(x,a)$ в

$R^n$, проходящую через точку $x$. Касательный вектор к этой кривой в точке $x$ имеет вид $\xi(x) = \left.\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}$, где $\xi(x)$ определяет касательное векторное поле $\xi : R^n \to R^n$ группы $G_r$.

Векторное поле $\xi(x)$ записывается также в виде линейного дифференциального оператора первого порядка $X = \xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и называется инфинитезимальным оператором однопараметрической группы $G_1$.

<u>Примечание:</u> считая функцию $f(x,a)$ в преобразовании $x' = f(x,a)$ достаточно гладкой (см. п. 4 определения группы Ли) из разложения в ряд Тейлора по $a$ (при $a << 1$) получим: $x' = x + \left.\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0} \cdot a + o(a) = x + \xi(x)a + o(a)$.
Это преобразование получило название инфинитезимального (т. е. бесконечно малого) преобразования. Например, для группы вращений в $R^2(x^1 = x, x^2 = y)$ конечный вид преобразования задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos a + y\cdot\sin a \\ y' = y\cdot\cos a - x\cdot\sin a \end{cases}$$

а соответствующее инфинитезимальное преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x' \approx x + y\cdot a \\ y' \approx y - x\cdot a \end{cases}$$

<u>*Первая теорема Ли*</u> устанавливает соответствие между однопараметрической группой преобразований $G_1$ и ее инфинитезимальным оператором $X$ (касательным векторным полем $\xi(x) : R^n \to R^n$).

Орбита точки $x$ является интегральной кривой уравнения Ли: $\dfrac{df}{da} = \xi(f)$, с начальным условием $\left.f(x,a)\right|_{a=0} = x$. Обратно: для любого гладкого векторного поля $\xi(x) : R^n \to R^n$ и $\forall x \in R^n$ $\exists !$ решение уравнения Ли. Это решение определяет однопараметрическую группу преобразований $G_1$ с законом умножения вида $\varphi(a,b) = a + b$, касательное векторное поле которой совпадает с заданным полем $\xi(x)$.

Док-во. Доказательство необходимости проведем на примере группы с законом умножения (групповым свойством) $\varphi(a,b) = a + b$. Тогда, рассматривая в качестве группового параметра $b$ приращение $\Delta a$ группового параметра $a$, получим для нашей группы

$f(f(x,a),\Delta a) = f(x, a + \Delta a)$. Отсюда из разложения в ряд Тейлора левой части по $\Delta a$ (при $\Delta a << 1$) в окрестности точки $0$ и правой части по $\Delta a$ (при $\Delta a << 1$) в окрестности точки $a$ получим главные линейные части разложений: $f(f(x,a),\Delta a)=f(f(x,a),0)+\left.\frac{\partial f(f(x,a),\Delta a)}{\partial \Delta a}\right|_{\Delta a=0}\cdot\Delta a+o(\Delta a)=f(x,a)+$

$\xi(f(x,a))\cdot\Delta a+o(\Delta a)$, где $\xi(f(x,a))\overset{def}{=}\left.\frac{\partial f(f(x,a),\Delta a)}{\partial \Delta a}\right|_{\Delta a=0}$

$f(x,a+\Delta a)=f(x,a)+\left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{\Delta a=0}\cdot\Delta a+o(\Delta a)$ и

Из этих двух разложений следует при $\Delta a\to 0$, что $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\xi(f(x,a))$ (1.1)

Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

Пусть $f=f(x,a)$ решение уравнение Ли (1.1). Выберем фиксированное достаточно малое значение параметра $a$ (поскольку мы имеем дело с локальными группами Ли преобразований в окрестности $a=0$) и рассмотрим две функции

$u(b)=f(x',b)=f(f(x,a),b)$

$\upsilon(b)=f(x,a+b)$

Для них в силу уравнения Ли имеем

$$\frac{du(b)}{db}=\frac{df(x',b)}{db}=\xi(u),\qquad u\big|_{b=0}=f(x,a)$$

$$\frac{d\upsilon(b)}{db}=\frac{df(x,a+b)}{db}=\xi(\upsilon),\ \ \upsilon\big|_{b=0}=f(x,a)$$

Т. е. функции $u(b)$ и $\upsilon(b)$ удовлетворяют одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка и одинаковым начальным условиям. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши следует искомое равенство $u(b)=\upsilon(b)$ или $f(f(x,a),b)=f(x,a+b)$. Достаточность доказана.

Примечание 1: Из доказательства достаточности следует: 1. группы Ли преобразований всегда коммутативны (абелевы). 2. Для решения уравнения Ли всегда существует такая параметризация, что закон умножения в группе будет иметь вид $\varphi(a,b)=a+b$.

Примечание 2: Умножение векторного поля $\xi$ на постоянный множитель равносильно линейной замене группового параметра соответствующей $G_1$, как видно из уравнения Ли. Поэтому все инфинитезимальные операторы определяются с точностью до умножения на постоянный множитель.

Примечание 3: Первая теорема Ли устанавливает взаимно-однозначное соответствие между локальным преобразованием, записанным в конечном виде $x'=f(x,a)$, и его инфинитезимальным аналогом $x'\approx x+\left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}\cdot a=x+\xi(x)a$. Т.е. главная линейная часть $\xi=\xi(x)$ в разложении конечного преобразования $x'=f(x,a)$ в ряд Тейлора по групповому параметру $a$ полностью определяет исходный вид конечного преобразования.

Утверждение: Путем замены группового параметра $a$ в локальной однопараметрической группе $G_1$ с произвольным законом умножения $\varphi(a,b)$ на канонический параметр $\widetilde{a}=\int\limits_0^a \left( \left.\dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right|_{b=0} \right)^{-1} da$ закон умножения в группе принимает вид $\widetilde{\varphi}(\widetilde{a},\widetilde{b})=\widetilde{a}+\widetilde{b}$.

Док-во. Представим основное групповое свойство группы Ли преобразований вида $x'=f(x,a)$ в форме

$$f(x',b)=f(f(x,a),b)=f(x,\varphi(a,b)) \qquad (*)$$

и пусть тождественное преобразование соответствует значению $a=0$ или $b=0$, т. е. $\varphi(a,o)=a$ и $\varphi(0,b)=b$. Продифференцируем левую и правую часть (*) по групповому параметру $b$:

$$\frac{\partial f(x',b)}{\partial b}=\frac{\partial f(x,c)}{\partial c}\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}$$

Положим теперь $b=0$ и, учитывая, что при этом $c=\varphi(a,0)=a$, получим

$$\left.\frac{\partial f(x',b)}{\partial b}\right|_{b=0}=\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\cdot\left.\left(\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right)\right|_{b=0} \qquad (**)$$

Заметим, что величина $\left.\left(\dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right)\right|_{b=0}=1$ при $a=0$, поэтому при малых значениях $a$ величина $\left.\left(\dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right)\right|_{b=0}\neq 0$ ввиду непрерывности. Тогда, вспомнив определение координат инфинитезимального оператора $\xi(x')=\left.\dfrac{\partial f(x',b)}{\partial b}\right|_{b=0}$, запишем полученное равенство (**) в виде

$$\xi(x')=\left.\left(\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right)\right|_{b=0}\cdot\frac{dx'}{da}=\frac{1}{\left(\left.\left(\dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right)\right|_{b=0}\right)^{-1}}\cdot\frac{dx'}{da}$$

или
$$\xi(x')=\frac{dx'}{d\left[\int\limits_0^a\left(\left.\dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right|_{b=0}\right)^{-1}da\right]}$$

или $\xi(x')=\dfrac{dx'}{d\,\widetilde{a}}$, где новый параметр

$$\widetilde{a}=\int\limits_0^a\left(\left.\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right|_{b=0}\right)^{-1}da.$$

Таким образом, относительно параметра $\widetilde{a}$ (названного каноническим) получилось уравнение Ли из первой теоремы Ли. Из доказательства достаточности первой теоремы

Ли следует, что закон умножения в группе с такой параметризацией имеет искомый вид $\widetilde{\varphi}(\widetilde{a},\widetilde{b}) = \widetilde{a} + \widetilde{b}$ . Что завершает доказательство нашего утверждения.

Рассмотрим теперь $r$ -параметрическую группу $G_r = \{T_a(x)\}$, где $a \in R^r$, $x \in R^n$ преобразований. Если для каждой однопараметрической подгруппы $G_1$ группы $G_r$ построить соответствующее касательное векторное поле, то эти поля образуют $r$-мерное векторное пространство $L_r$. Пространство $L_r$ является алгеброй Ли относительно операции умножения: $[X,Y] = XY - YX = (X(\eta^i) - Y(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i}$, где $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$; $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

В качестве базиса алгебры $L_r$ можно взять векторное поле: $\xi_\nu(x) = \left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a^\nu}\right|_{a=0}$, где $\nu = 1 \div r$, ($a = (a^1,...,a^r)$). Уравнение Ли, связывающие группу $G_r$ с ее алгеброй Ли $L_r$, имеет вид следующей вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка: $\frac{\partial f}{\partial a^\nu} = V_\nu^\mu(a)\xi_\mu(f)$, $\nu = 1 \div r$, $f|_{a=0} = x$, где коэффициенты $V_\nu^\mu(a)$ определяются из закона умножения $\varphi(a,b)$ в группе $G_r$: $V_\nu^\mu(a) = \left.\frac{\partial \varphi^\mu(a,b)}{\partial a^\nu}\right|_{b=a^{-1}}$.

Построение преобразований группы $G_r$ по ее заданной алгебре Ли $L_r$ удобно проводить в канонических координатах второго рода. Для этого выбирается некоторый базис $\{\xi_\nu\}$ алгебры $L_r$ и для любого базисного вектора $\xi_\nu$ строится соответствующая однопараметрическая группа преобразований с помощью уравнения Ли: $\frac{df}{da^\nu} = \xi_\nu(f)$, $f|_{a^\nu=0} = x$.

Общий вид преобразования группы $G_r$ получается перемножением преобразований полученных однопараметрических групп. При этом параметры $a^1,...,a^r$ выполняют роль координат параметрической точки $a$ группы $G_r$ и задают в локальной группе $G_r$ систему координат, называемую канонической второго рода.

## *2. Инварианты группы преобразований $G_r$*

<u>*Определение:*</u> Функция $F(x)$ называется инвариантом группы $G_r$ преобразований $x' = f(x,a)$ в $R^n$, если $F(x)$ постоянна на $G_r$ орбите каждой точки $x \in R^n$,т. е. если $F(f(x,a)) = F(x)$.

*Критерий инвариантности:* Функция $F(x): R^n \to R$ является инвариантом однопараметрической группы преобразований $G_1$ (с алгеброй инфинитезимальных операторов $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, где $\xi^i = \left.\dfrac{\partial f^i(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}$), тогда и только тогда, когда

$$XF \equiv \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0 \tag{2.1}$$

Это утверждение следует из равенства $\dfrac{\partial F(f)}{\partial a} = F'(f)\xi(f)$ справедливого в силу уравнения Ли для любого дифференцируемого отображения $F: R^n \to R^m$.

Любой набор $n-1$ функционально независимых решений $J_1(x), J_2(x), ...J_{n-1}(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (2.1) образует базис инвариантов, т. е. всякий инвариант $F(x)$ представим в виде $F(x) = \hat{O}(J_1(x), J_2(x), ...J_{n-1}(x))$ с некоторой гладкой функцией $\hat{O}: R^{n-1} \to R$.

Замечание: Уравнению (2.1): $\xi^i(x)\dfrac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0$ можно поставить в соответствие характеристическую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = ... = \frac{dx^n}{\xi^n(x)} \tag{2.2}$$

Эта характеристическая система имеет $n-1$ первый интеграл (функционально независимый) $J_i$ ($i$=1,…, $n-1$), что и решает поставленную задачу построения базиса инвариантов для однопараметрической группы $G_1$.

Например, для плоского случая $R^2(x^1 = x, x^2 = y)$ рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-ого порядка относительно функции $y = y(x)$, записанное в дифференциалах (характеристическая форма записи)

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \tag{2.3}$$

Оно равносильно уравнению в частных производных первого порядка

$$P(x,y)\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x,y)\cdot\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{2.4}$$

в том смысле, что левая часть всякого интеграла $F(x,y) = C$, где $C = const$, уравнения (2.3) является решением уравнения (2.4), и обратно, всякое решение $F = F(x,y)$ уравнения (2.4), приравненное произвольной постоянной, дает интеграл уравнения (2.3).

Действительно: $P(x,y)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + Q(x,y)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot dx = 0$ то, с учетом (2.3), имеем

$P(x,y)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + P(x,y)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot dy = 0$, след., $P(x,y)\cdot(\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot dy) = 0$,

т. е. при $P(x,y) \neq 0$ имеем $dF(x,y) = 0$, след., $F(x,y) = C$, где $C = const$.

Примеры в плоскости $R^2(x^1 = x, x^2 = y)$:

1) Перенос вдоль оси $Ox$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}, \ a \in R \ \Rightarrow X = \frac{\partial}{\partial x} \text{ (или } X = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\text{);}$$

$\Rightarrow$ характеристическая система: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{0}$ $\Rightarrow$ инвариант $J = y$.

2) Вращение в плоскости на угол $\varphi = a$:

$$\begin{cases} x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \end{cases} \Rightarrow X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ Характеристическая система $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$ $\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = const$ $\Rightarrow$ $J = x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ Всякий инвариант $F(x, y) = \hat{O}(x^2 + y^2)$.

3) Неоднородное растяжение в 3-х мерном пространстве $R^3(t, x, y)$:

$$\begin{cases} t' = e^{2a} t \\ x' = e^a x \ , \ a \in R \\ y' = e^a y \end{cases} \Rightarrow X = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow$$

Характеристическая система: $\dfrac{dt}{2t} = \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ $\Rightarrow$ инварианты $\dfrac{x}{\sqrt{t}} = J_1$, $\dfrac{y}{\sqrt{t}} = J_2$ $\Rightarrow$

Общий инвариант $F(t, x, y) = \hat{O}(\dfrac{x}{\sqrt{t}}; \dfrac{y}{\sqrt{t}})$.

<u>Теорема</u>. Любая однопараметрическая локальная группа $G_1$ преобразований $x' = f(x, a)$ в пространстве $R^n$ некоторой невырожденной заменой переменных $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ приводится к группе переносов вдоль оси $\tilde{x}^n$.

Док-во. Запишем инфинитезимальный оператор $X = \xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ однопараметрической локальной группы $G_1$. Из формул преобразования производных при замене переменных $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ следует вид преобразованного оператора $\tilde{X} = X(\tilde{x}^i)\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$. Теперь выберем любой набор $n - 1$ функционально независимых инвариантов группы $G_1$ - $J_1(x), J_2(x), \ldots J_{n-1}(x)$ в качестве первых $n - 1$ новых переменных $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^{n-1}$, а переменную $\tilde{x}^n$ найдем из решения уравнения $X(\tilde{x}^n) = 1$. Тогда полученная система функций $\tilde{x}^1 = J_1(x), \ldots, \tilde{x}^{n-1} = J_{n-1}(x), \tilde{x}^n = \tilde{x}^n(x)$ будет функционально независимой и даст искомую замену переменных. Потому что в этих переменных искомый оператор примет вид $\widetilde{X} = X(\widetilde{x}^i)\dfrac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i} = \dfrac{\partial}{\partial \widetilde{x}^n}$, т. е. оператор $\widetilde{X}$ является оператором переноса вдоль оси $\widetilde{x}^n$. Что и требовалось доказать.

Примеры наиболее часто встречающихся групп преобразований на плоскости $R^2(x^1 = x, x^2 = y)$ приведены в Таблице № 1.

Таблица №1

| Исходное преобразование | Соответствующий инфинитезимальный оператор | Инвариант преобразования | Замена переменных $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x, y), \widetilde{y} = \widetilde{y}(x, y)$, приводящая к оператору переноса $X = \dfrac{\partial}{\partial \widetilde{x}}$ |
|---|---|---|---|
| Преобразования переноса:<br>По $x$: $x' = x + a, y' = y$<br><br>По $y$: $x' = x, y' = y + a$<br><br>Вдоль прямой $kx + ly = 0$<br>$x' = x + la, y' = y - ka$ | $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$<br><br>$X = \dfrac{\partial}{\partial y}$<br><br>$X = l\dfrac{\partial}{\partial x} - k\dfrac{\partial}{\partial y}$ | $J = y$<br><br>$J = x$<br><br>$J = kx + ly$ | $\widetilde{x} = x, \widetilde{y} = y$<br><br>$\widetilde{x} = y, \widetilde{y} = x$<br><br>$\widetilde{x} = \dfrac{x}{l}, \widetilde{y} = kx + ly$ |
| Преобразование вращения:<br>$\begin{cases} x' = x \cdot \cos a + y \cdot \sin a \\ y' = y \cdot \cos a - x \cdot \sin a \end{cases}$ | $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ | $J = x^2 + y^2$ | $\widetilde{x} = arctg\dfrac{x}{y}$,<br>$\widetilde{y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| Преобразование Лоренца:<br>$\begin{cases} x' = x \cdot ch\, a + y \cdot sh\, a \\ y' = y \cdot ch\, a + x \cdot sh\, a \end{cases}$ | $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ | $J = y^2 - x^2$ | $\widetilde{x} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y + x}{y - x}$,<br>$\widetilde{y} = y^2 - x^2$ |
| Преобразование Галилея:<br>$x' = x + ay,\ y' = y$ | $X = y\dfrac{\partial}{\partial x}$ | $J = y$ | $\widetilde{x} = \dfrac{x}{y}, \widetilde{y} = y$ |
| Преобразование однородного растяжения:<br>$x' = x e^a,\ y' = y e^a$ | $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ | $J = \dfrac{x}{y}$ | $\widetilde{x} = \ln x, \widetilde{y} = \dfrac{x}{y}$ |
| Преобразование неоднородного растяжения:<br>$x' = x e^a,\ y' = y e^{ka}$ | $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + ky\dfrac{\partial}{\partial y}$ | $J = \dfrac{x^k}{y}$ | $\widetilde{x} = \ln x, \widetilde{y} = \dfrac{x^k}{y}$ |
| Проективное преобразование:<br>$x' = \dfrac{x}{1 - ax},\ y' = \dfrac{y}{1 - ax}$ | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $X = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x} +$ $+ xy \dfrac{\partial}{\partial y}$ | $J = \dfrac{x}{y}$ | $\widetilde{x} = -\dfrac{1}{x}, \widetilde{y} = \dfrac{x}{y}$ |

*3. Инвариантные многообразия*

Рассмотрим $(N - s)$ - мерную поверхность $M \subset R^N$, заданную системой уравнений:

$F_1(x) = 0, ..., F_s(x) = 0$, где $s \leq N$ (3.1)

(считаем, что это задание поверхности является регулярным, т.е. ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial F_k}{\partial x^i}\Big|_M \right\| = s$, где $k = 1 \div s, i = 1 \div N$).

*Определение:* Поверхность $M$ называется инвариантной относительно группы $G$ преобразований вида $x' = f(x, a)$, если любая точка $x \in M$ перемещается преобразованием $f(x, a)$ в точку $x' \in M$. Другими словами, если $x$ - решение системы (3.1), то $x' = f(x, a)$ - тоже решение (3.1) или $F_k(x') = 0$, $k = 1 \div s$.

Поэтому часто говорят, что система уравнений (3.1) инвариантна относительно группы $G$ или, что система уравнений (3.1) допускает группу $G$.

*Теорема 1*. Система уравнений (3.1) инвариантна относительно группы $G$ тогда и только тогда, когда

$XF_k\big|_M = 0$, $k = 1 \div s$,

где $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ - инфинитезимальный оператор группы $G$.

*Теорема 2*. Поверхность $M$, инвариантная относительно группы $G$, может быть задана системой уравнений вида:

$\Phi_k(J_1(x), ..., J_{N-1}(x)) = 0$, $k = 1 \div s$,

где функции $J_1(x), ..., J_{N-1}(x)$ образуют базис инвариантов группы $G$, если инфинитезимальный оператор группы $G$ не равен 0 в точках поверхности $M$.

Замечание: 1) Если инфинитезимальный оператор $X\big|_{x_0} = 0$ в точке $x_0$, т.е. $\xi^i(x_0) = 0$, тогда $x_0$ - неподвижная точка, т.е. $x_0' = x_0$ (пример – группа вращений с оператором $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ в точке $x_0 = (0,0)$ - неподвижная точка).

2) Понятно, что инвариантное многообразие $M$ может быть и кривой на плоскости.

3) Пример инвариантного многообразия $M$: параболоид вращения: (*) $x^1 - \sum_{i=2}^{N}(x^i)^2 = 0$ в пространстве $R^n$.

Многообразие (*) - инвариантно относительно однопараметрической группы $G_1$ неоднородных растяжений с инфинитезимальным оператором

$$X = 2x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + ... + x^N\frac{\partial}{\partial x^N} \quad (**).$$

Выполнение условий теоремы 1 следует из равенства

$X\big|_{x^1-\sum_{i=2}^{N}(x^i)^2=0}(x^1 - \sum_{i=2}^{N}(x^i)^2) = 2(x^1 - \sum_{i=2}^{N}(x^i)^2)\Big|_{x^1-\sum_{i=2}^{N}(x^i)^2=0} = 0$. В частности из этого равенства видно, что левая часть уравнения (*) не является инвариантом.

Теперь найдем базис инвариантов (**).

$$\frac{dx^1}{2x^1} = \frac{dx^2}{x^2} = ... = \frac{dx^N}{x^N} \Rightarrow \begin{array}{l} J_1(x) = \dfrac{(x^2)^2}{x^1} \\ J_2(x) = \dfrac{(x^3)^2}{x^1} \\ ... \\ J_{N-1} = \dfrac{(x^N)^2}{x^1} \end{array}$$

Из (*) следует после деления на $x^1$:

$$1 - \sum_{i=1}^{N-1}J_i(x) = 0 \Leftrightarrow J_1(x) + ... + J_{N-1}(x) = 1$$

- представление многообразия (*) в инвариантной форме (виде).

Отметим, что инвариантное представление многообразия (*), конечно, не единственно.

*4. Вычисление группы, допускаемой системой дифференциальных уравнений: основные понятия, формулы продолжения, определяющие уравнения, примеры вычисления допускаемых групп.*

Группа точечных преобразований характеризует свойства симметрии дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) и используется для его полного интегрирования или построения отдельных классов точных решений или качественного исследования как самого уравнения, так и краевых задач на его основе.

В качестве примера для иллюстрации основных понятий и этапов отыскания допускаемой группы преобразований рассмотрим известное уравнение теплопроводности:

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad (4.1)$$

Уравнение (4.1)- это линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с одной искомой функцией $u$ и двумя независимыми переменными $t, x$. Нетрудно заметить, что уравнение (4.1) не изменяется при следующих типах преобразований зависимых и независимых переменных (т.е. $u_t - u_{xx} = 0$ переходит в $u'_{t'} - u'_{x'x'} = 0$):

1. $t' = t + a, x' = x, u' = u$ – переносы по времени.
2. $t' = t, x' = x + a, u' = u$ – переносы по пространственной координате.
3. $t' = t, x' = x, u' = u + a\varphi(t, x)$, где $\varphi(t, x)$ - любое решение уравнения (4.1) (принцип суперпозиции решений линейного однородного уравнения).
4. $t' = t, x' = x, u' = e^a u$ – факт того, что функция $u$ в (4.1) определена с точностью до умножения на отличную от нуля постоянную.

Про всякое преобразование, переводящее данное дифференциальное уравнение в равносильное уравнение того же вида, говорят, что это преобразование допускается рассматриваемым дифференциальным уравнением. Таким образом, приведенные четыре однопараметрические группы преобразований допускаются уравнением теплопроводности (4.1). Причем их нахождение не требует знания техники вычисления допускаемой группы. Однако следующее однопараметрическое семейство преобразований уже вряд ли может быть найдено из общих соображений без знания техники вычисления допускаемой группы:

5. $t' = t, x' = x + 2at, u' = ue^{-(ax+a^2t)}$.

Для проверки наличия преобразования вида 5. у уравнения теплопроводности (4.1) нам потребуется знание формул преобразования производных при точечной замене переменных (см. приложение 2), из которых мы находим:

$$\begin{cases} u'_{t'} = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)} \\ u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)} \\ u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)} \end{cases} \qquad (*)$$

Откуда следует, что

$u'_{t'} - u'_{x'x'} = (u_t - u_{xx})e^{-(ax+a^2t)}$, но так как $u_t - u_{xx} = 0 \Rightarrow u'_{t'} - u'_{x'x'} = 0$. Т.е. действительно преобразование вида 5. переводит (оставляет инвариантным) уравнение теплопроводности само в себя.

Одним из возможных нетривиальных применений допускаемых групп преобразований является тот факт, что они переводят любое решение рассматриваемого дифференциального уравнения снова в решение этого же уравнения (так называемые формулы производства решений). Продемонстрируем это свойство на примере преобразования 5. Пусть дано некоторое решение $u = \varphi(t, x)$ уравнения теплопроводности. Так как в преобразованных (штрихованных) переменных $t', x', u'$ уравнение (4.1) имеет тот же вид, то запишем решение $u = \varphi(t, x)$ в штрихованных переменных $u' = \varphi(t', x')$. Подставим сюда выражение для $t', x', u'$ из (5.) и, разрешив полученное равенство относительно $u$, получим:

$u = e^{ax+a^2t}\varphi(t, x + 2at)$.

Эта формула определяет однопараметрическое семейство решений. Например, из стационарного решения уравнения теплопроводности $u = x$ получаем семейство нестационарных решений

$u = (x + 2at)e^{ax+a^2t}$, где $a \in R$.

Подводя итог этому введению, мы можем сказать, что сейчас мы знаем пять различных групп однопараметрических преобразований, допускаемых уравнением теплопроводности (в действительности в формуле $u' = u + a\varphi(t,x)$ содержится бесконечно много однопараметрических групп, так как имеется бесконечно много независимых решений $\varphi(t,x)$ уравнения (4.1)). Возникает вопрос, исчерпываются ли ими все допускаемые группы точечных преобразований. Если нет, то как найти остальные и доказать, что найдены все преобразования, допускаемые уравнением теплопроводности и образующие группу. Эффективный ответ на этот вопрос дает подход, основывающийся на 1). дифференциально-алгебраической трактовке дифференциальных уравнений как поверхностей (многообразий) в продолженном (на производные от $u$ по $t,x$) пространстве, 2). на критерии инвариантности алгебраических поверхностей (многообразий) относительно действия инфинитезимального оператора $X$, порождаемого данной группой $G$, 3). на построении формул продолжения координат инфинитезимального оператора $X$ на первые, вторые и, если необходимо, более высокого порядка производные.

В качестве наглядной иллюстрации такого подхода вернемся вновь к однопараметрической подгруппе 5., допускаемой уравнением теплопроводности. Во-первых, будем рассматривать уравнение теплопроводности (4.1) как 5-тимерную гиперплоскость в пространстве алгебраически независимых переменных $R^6(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx})$. Инвариантность уравнения (4.1) относительно преобразований 5. означает инвариантность указанной 5-тимерной гиперплоскости в $R^6$ относительно продолженных преобразований, задаваемых формулами 5. и (*). Но так как последние образуют группу, то справедлив инфинитезимальный критерий инвариантных многообразий (Теорема 1), что сейчас и будет проверено:

а) выпишем по 5. инфинитезимальный оператор $X = 2t\partial_x - xu\partial_u$.

б) при помощи (*) найдем второе продолжение $\underset{2}{X} = X + \tilde{u}_t\partial_{u_t} + \tilde{u}_x\partial_{u_x} + \tilde{u}_{xx}\partial_{u_{xx}}$, где координаты $\tilde{u}_t, \tilde{u}_x, \tilde{u}_{xx}$ находятся согласно общему определению координат инфинитезимального оператора по формулам:

$$\tilde{u}_t = \left.\frac{\partial u'_{t'}}{\partial a}\right|_{a=0} = -(xu_t + 2u_x)$$

$$\tilde{u}_x = \left.\frac{\partial u'_{x'}}{\partial a}\right|_{a=0} = -(xu_x + u)$$

$$\tilde{u}_{xx} = \left.\frac{\partial u'_{x'x'}}{\partial a}\right|_{a=0} = -(xu_{xx} + 2u_x)$$

Таким образом, $\underset{2}{X} = 2t\partial_x - xu\partial_u - (xu_t + 2u_x)\partial_{u_t} - (xu_x + u)\partial_{u_x} - (xu_{xx} + 2u_x)\partial_{u_{xx}}$

(Примечание: Действие дважды продолженного оператора $\underset{2}{X}$ не указано на вторые производные $u_{tt}$ и $u_{tx}$, так как эти величины не задействованы в уравнении (4.1), формулах 5. и (*) ).

в) Подействуем согласно критерию инвариантности многообразия оператором $\underset{2}{X}$ на многообразие (4.1) при условии выполнения связей, накладываемых многообразием (4.1) (при этом все величины $t,x,u,u_t,u_x,u_{xx}$ за вычетом связи, накладываемой многообразием (4.1), – считаются независимыми):

$$\underset{2}{X}(u_t - u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x)\partial_{u_t}(u_t - u_{xx}) - (xu_{xx} + 2u_x)\partial_{u_{xx}}(u_t - u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x) +$$

$$+ (xu_{xx} + 2u_x) = x(u_{xx} - u_t)$$

С учетом (4.1) имеем $\underset{2}{X}\Big|_{u_t - u_{xx}=0}(u_t - u_{xx}) = (x(u_{xx} - u_t))\big|_{u_t - u_{xx}=0} \equiv 0$, что и означает выполнение критерия инвариантности для многообразия (4.1).

Эта же схема, проведенная в обратном порядке, т.е. от уравнения $\underset{2}{X}\Big|_{u_t - u_{xx}=0}(u_t - u_{xx}) \equiv 0$ к координатам инфинитезимального оператора $X = \tilde{t}(t,x,u)\partial_t + \tilde{x}(t,x,u)\partial_x + \tilde{u}(t,x,u)\partial_u$, позволяет найти все допускаемые уравнением (4.1) группы точечных преобразований.

Перейдем теперь к построению регулярного алгоритма нахождения группы Ли точечных преобразований (основной группы), допускаемых рассматриваемым дифференциальным уравнением (системой дифференциальных уравнений). Как видно из вышесказанного, существенным шагом на этом пути является умение строить координаты продолженного оператора $\underset{p}{X}$, где $p$ - порядок системы дифференциальных уравнений.

Для этого будем различать следующие наборы переменных

$x = \{x^i\}$, $u = \{u^\alpha\}$, $\underset{1}{u} = \{u_i^\alpha\}$, $\underset{2}{u} = \{u_{ij}^\alpha\}$,…., где индекс $i = 1 \div n, \alpha = 1 \div m$. Эти переменные считаются алгебраически независимыми, но связанными дифференциальными соотношениями:

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha),\; u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha),...$$

с помощью операторов “полного” дифференцирования по переменной $x^i$:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots .$$

Из этих формул видно, что должны выполняться условия симметричности $u_{ij}^\alpha = u_{ji}^\alpha$ и т.п.

Операторы дифференцирования $D_i$ «обрываются» при действии ими на функции от конечного набора переменных $x, u, \underset{1}{u},...$ и, следовательно, корректно определены на множестве всех гладких функций от любого конечного набора указанных переменных. Будем считать эти функции аналитическими.

Величины $x^i$ называются <u>независимыми переменными</u>; $u^\alpha$ - <u>дифференциальными переменными</u>; $u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha,...$ <u>- первыми, вторыми и т.д. производными</u> этих дифференциальных переменных. Всякая аналитическая функция <u>конечного</u> набора переменных $x, u, \underset{1}{u},...$ называется дифференциальной функцией. Максимальный порядок “$p$” производной $\underset{p}{u}$, входящей в дифференциальную функцию, называется порядком этой функции. Множество всех дифференциальных функций обозначим $A$.

Пусть $F \in A$ - дифференциальная функция порядка $p$.

Уравнение $$F(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{p}{u}) = 0 \qquad (4.2)$$

задает некоторую поверхность в пространстве переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}$. Будем рассматривать уравнение (4.2) вместе со всеми его дифференциальными следствиями

$$D_i F = 0, D_i D_j F = 0, \ldots \qquad (4.2')$$

и говорить, что уравнение (4.2) вместе с (4.2') задает дифференциальное многообразие $[F]$. Аналогично рассматривается дифференциальное многообразие, заданное системой уравнений

$$F_1(x, u, \ldots, \underset{p_1}{u}) = 0, \ldots, F_s(x, u, \ldots, \underset{p_s}{u}) = 0. \qquad (4.3)$$

Теперь, чтобы перейти от дифференциального многообразия к понятию дифференциального уравнения, необходимо указать, что будет пониматься под решением дифференциального уравнения. Например, классическим решением уравнения (4.2) называется достаточное число раз дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ такая, что при подстановке вместо величин $u^{\alpha,}, u_i^{\alpha}, \ldots$ функций $\varphi^{\alpha}(x), \dfrac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^i}, \ldots$ равенство (4.2) выполняется тождественно по $x$. Вместо классических решений можно рассматривать также обобщенные решения. В любом случае понятие дифференциального уравнения включает в себя в качестве составных элементов дифференциальное многообразие и определение решения. При вычислении допускаемой группы мы как бы забываем про решение и воспринимаем дифференциальные уравнения просто как дифференциальные многообразия. Тогда мы можем смотреть на (4.2) (или (4.3)) как на обычные алгебраические (недифференциальные) системы уравнений, задающих многообразие в продолженном пространстве, и использовать инфинитезимальный критерий инвариантности многообразия относительно необходимое количество раз продолженного инфинитезимального оператора $\underset{p}{X}$.

Перейдем теперь к построению рекуррентных зависимостей для координат продолженного оператора $\underset{p}{X}$.

## *5. Формулы продолжения точечных преобразований*

Запишем точечные преобразования независимых $x^i$ и зависимых (дифференциальных) $u^{\alpha}$ переменных в виде:

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(x,u,a), \text{где } f^i\big|_{a=0} = x^i, i = 1 \div n \\ u'^{\alpha} &= \varphi^{\alpha}(x,u,a), \text{где } \varphi^{\alpha}\big|_{a=0} = u^{\alpha}, \alpha = 1 \div m \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Предполагая выполненным для функций $f$ и $\varphi$ групповое свойство для однопараметрических групп: где $z = (x,u), f(f(z,a),b) = f(z,a+b), \varphi(\varphi(z,a),b) = \varphi(z,a+b)$;

Запишем инфинитезимальный оператор $X$ группы точечных преобразований $G$ в виде:

$$X = \xi^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta^{\alpha}(x,u)\partial_{u^{\alpha}}, \qquad (5.2)$$

где

$$\xi^i(x,u) = \left.\frac{\partial f^i}{\partial a}\right|_{a=0}, \eta^{\alpha}(x,u) = \left.\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial a}\right|_{a=0} \qquad (5.3)$$

Нас интересует продолжение действия оператора $X$ на первые производные $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$, т.е. оператор $\underset{1}{X} = X + \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$, где $\xi_i^\alpha = \left.\frac{\partial u_i'^\alpha}{\partial a}\right|_{a=0}$, $u_i'^\alpha = g_i^\alpha(x,u,\underset{1}{u},a)$, $\underset{1}{u} = \{u_i^\alpha\}$.

Для вывода продифференцируем 2-ое соотношение в (5.1) по переменной $x^i$

$$\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}, \text{ где } \begin{array}{l} u'^\alpha = u'^\alpha(x'^i(x,u,a)) \\ \varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x,u,a) \end{array} \tag{5.4}$$

получим для левой части равенства (5.4):

$$\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right), \text{ т. к. } u^\beta = u^\beta(x)$$

для правой части равенства (5.4):

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}, \text{ где } u^\beta = u^\beta(x)$$

Приравнивая преобразованную левую часть соотношения (5.4) правой части, получим:

$$\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \tag{5.5}$$

Отсюда, разрешая полученную линейную алгебраическую систему (5.5) $n \cdot m$ уравнений относительно $n \cdot m$ неизвестных $\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^j}$, получим зависимости вида:

$$u_i'^\alpha = g_i^\alpha(x,u,\underset{1}{u},a), \text{ где } \underset{1}{u} = \{u_i^\alpha\}$$

Линейная система (5.5) всегда имеет единственное решение при достаточно малых значениях параметра $a$. Действительно, при $a = 0$ имеем $\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} = \delta_i^j$, так как $\left. f^j \right|_{a=0} = x^j$, поэтому матрица $\left\| \frac{\partial f^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right\|$ обратима при малых значениях параметра $a$.

Для нахождения координат $\xi_i^\alpha$ первого продолжения инфинитезимального оператора $\underset{1}{X}$ продифференцируем обе части системы (5.5) по параметру $a$ в точке $a = 0$. Учитывая перестановочность дифференцирований $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}$ и $\frac{\partial}{\partial a}$, а также определение (5.3) и начальные условия в преобразованиях (5.1), получим:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^j}\right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right)$$

при значении $a = 0$,

$$\Rightarrow \zeta_j^\alpha\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} + 0\right) + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i},$$

Обозначив для краткости написания $u_j^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}$, получим:

$$\zeta_j^\alpha \delta_i^j + u_j^\alpha D_i(\xi^j) = D_i(\eta^\alpha), \qquad (5.6)$$

где оператор полного дифференцирования $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\beta \dfrac{\partial}{\partial u^\beta} + u_{ij}^\beta \dfrac{\partial}{\partial u_j^\beta} + \ldots$ использован нами для сокращения записи и его действие оканчивается на дифференцировании $\dfrac{\partial}{\partial u^\beta}$ в данном случае.

Из (5.6) получаем искомую формулу продолжения на первые производные (точнее координаты $\zeta_i^\alpha$ продолженного оператора $\underset{1}{X}$):

При $j = i$ имеем $\delta_i^j = 1 \Rightarrow \zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j)$ (5.7)

Как видно из (5.7), для построения первого продолжения оператора нужно знать лишь координаты $\xi^i, \eta^\alpha$ исходного инфинитезимального оператора $X$.

Совершенно аналогично строятся второе, третье и т.д. продолжения оператора $X$. Например, для часто используемого второго продолжения имеем:

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha},$$

где $\zeta_{ij}^\alpha = \left.\dfrac{\partial u_{ij}'^\alpha}{\partial a}\right|_{a=0} = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k)$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j} + u_j^\beta \dfrac{\partial}{\partial u^\beta} + u_{ji}^\beta \dfrac{\partial}{\partial u_i^\beta}$

Причем в данном случае действие оператора $D_j$ на координаты $\zeta_i^\alpha$ заканчивается дифференцированием $\dfrac{\partial}{\partial u_i^\beta}$, а действие на координаты $\xi^k$ членом $\dfrac{\partial}{\partial u^\beta}$.

*Пример построения координат продолженного оператора*
*для случая обыкновенных производных*

Для более глубокого понимания сути проделанных выкладок покажем алгоритм построения продолженных операторов на примере одной функции $u = u(x)$ одной переменной $x$ (т. е. для случая обыкновенного дифференциального уравнения).

Пусть точечные преобразования независимой переменной $x$ и зависимой (дифференциальной) переменной $u$ заданы в форме:

$$\begin{aligned} x' &= f(x,u,a), \text{где } f\big|_{a=0} = x \\ u' &= \varphi(x,u,a), \text{где } \varphi\big|_{a=0} = u \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Запишем инфинитезимальный оператор $X$ группы точечных преобразований $G$ в виде:

$$X = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u, \qquad (5.9)$$

где координаты оператора $X$ определяются формулами

$$\xi(x,u) = \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{a=0}, \eta(x,u) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right|_{a=0}$$

(5.10)

Выпишем согласно общим правилам формулы преобразования первой производной $\frac{du'}{dx'}$ и второй производной $\frac{d^2u'}{dx'^2}$ под действием преобразования (5.8). Для этого продифференцируем левую и правую часть второго соотношения в (5.8) по переменной $x$, получим:

$$\frac{du'(x'(x,u,a))}{dx} = \frac{d\varphi(x,u,a)}{dx}$$

Левая часть равна $\frac{du'(x'(x,u,a))}{dx} = \frac{du'}{dx'}\frac{dx'}{dx} = \frac{du'}{dx'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{du}{dx}\right) = \frac{du'}{dx'}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)$

Правая часть равна $\frac{d\varphi(x,u,a)}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx}$

Поэтому $\frac{du'}{dx'}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx}$. Из этого соотношения следует закон преобразования первой производной (5.11) (для краткости правую часть в найденном законе преобразования первой производной будем обозначать функцией $g(x,u,\frac{du}{dx},a)$):

$$\frac{du'}{dx'} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}} \equiv g(x,u,\frac{du}{dx},a) \qquad (5.11)$$

Как видим, в случае одной функции ($m = 1$) одного аргумента ($n = 1$) система линейных уравнений (5.5) сводится к одному уравнению с одной неизвестной величиной $\frac{du'}{dx'}$, решение которого имеет вид (5.11).

Для записи закона преобразования производных первого и более высокого порядка удобно использовать оператор (“символ”) полного дифференцирования $D_j$, который в случае одной функции одного аргумента примет вид $D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{\partial}{\partial u} + \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\frac{du}{dx}} + \ldots$ (индекс "$j$" у оператора $D_j$ здесь уже не нужен).

Тогда формулы преобразования первой производной $\frac{du'}{dx'}$ вида (5.11) запишутся в сжатой форме: $\frac{du'}{dx'} = \frac{D(\varphi)}{D(f)} \equiv g(x,u,\frac{du}{dx},a),$ ãäå $\frac{D(\varphi)}{D(f)} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}}$

Аналогично для случая преобразования второй производной получим

$$\frac{d^2u'}{dx'^2}=\frac{d\,\dfrac{du'}{dx'}}{dx'}=\frac{D(g)}{D(f)}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial g}{\partial(du/dx)}\dfrac{d^2u}{dx^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx}}\equiv\psi(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2},a)$$

(5.12)

Ряд формул (5.11), (5.12) без труда может быть продолжен на случай производных более высокого порядка, чем второй.

Таким образом, мы нашли формулы преобразования первых (5.11) и вторых (5.12) производных искомой функции по заданному закону преобразования (5.8) самой функции $u$ и независимой переменной $x$. Совокупность формул (5.8)+(5.11) дает нам первое продолжение $\underset{1}{G}$ заданной группы точечных преобразований $G$, действующее уже в пространстве трех переменных $R^3(x,u,\frac{du}{dx})$. Добавление формул (5.12) к формулам (5.8)+(5.11) дает нам дважды продолженную группу $\underset{2}{G}$, действующую в четырехмерном пространстве $R^4(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2})$. Получим теперь - по известным в конечном виде законам преобразования первых (5.11) и вторых (5.12) производных - выражения для координат первого продолжения $\underset{1}{X}$ и второго продолжения $\underset{2}{X}$ исходного инфинитезимального оператора $X$. По определению координаты инфинитезимального оператора $X$ - суть главные линейные части в разложении исходного преобразования (5.8) в ряд по малому параметру $a$. Поэтому инфинитезимальное преобразование исходных переменных $(x,u)$- аналог исходного преобразования (5.8) для бесконечно малых значений параметра $a$ - имеет вид:

$$\begin{cases} x'=x+a\xi,\ \text{где}\ \xi=\left.\dfrac{\partial f}{da}\right|_{a=0} \\ u'=u+a\eta,\ \text{где}\ \eta=\left.\dfrac{\partial\varphi}{da}\right|_{a=0} \end{cases}$$

(5.13)

Подставим теперь формулы (5.13) в выражение (5.11) для преобразования первой производной и, пренебрегая членами порядка $o(a)$, получим инфинитезимальный аналог закона преобразования первой производной:

$$\frac{du'}{dx'}=\frac{\dfrac{du}{dx}+aD(\eta)}{1+aD(\xi)}=\left(\frac{du}{dx}+aD(\eta)\right)\left(1-aD(\xi)\right)+o(a)=\frac{du}{dx}+a\left(D(\eta)-\frac{du}{dx}D(\xi)\right)+$$

$$+o(a)=\frac{du}{dx}+a\zeta_1+o(a),\ \text{где}\ \zeta_1=D(\eta)-\frac{du}{dx}D(\xi) \qquad (5.14)$$

Т. о. инфинитезимальное преобразование первой производной дается формулой

$$\frac{du'}{dx'}=\frac{du}{dx}+a\zeta_1,\ \text{где}\ \zeta_1\overset{def.}{=}\left.\frac{\partial\left(\dfrac{du'}{dx'}\right)}{\partial a}\right|_{a=o}=\left.\frac{\partial g(x,u,\dfrac{du}{dx},a)}{\partial a}\right|_{a=o}$$

Следовательно, инфинитезимальный оператор продолженной группы $\underset{1}{G}$ равен:

$$\underset{1}{X} = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u + \zeta_1(x,u,\frac{du}{dx})\,\partial_{du/dx}, \quad \text{где} \quad \zeta_1 = D(\eta) - \frac{du}{dx}D(\xi)$$
(5.15)

Аналогично, подставив формулы (5.13) в выражение (5.12) для преобразования второй производной и, пренебрегая членами порядка $o(a)$, получим инфинитезимальный аналог закона преобразования второй производной:

$$\frac{d^2u'}{dx'^2} = \frac{\frac{d^2u}{dx^2} + aD(\zeta_1)}{1 + aD(\xi)} = \left(\frac{d^2u}{dx^2} + aD(\zeta_1)\right)\left(1 - aD(\xi)\right) + o(a) = \frac{d^2u}{dx^2} + a\left(D(\zeta_1) - \frac{d^2u}{dx^2}D(\xi)\right) +$$

$$+o(a) = \frac{d^2u}{dx^2} + a\zeta_2 + o(a), \text{где } \zeta_2 = D(\zeta_1) - \frac{d^2u}{dx^2}D(\xi) \qquad (5.16)$$

Поэтому инфинитезимальное преобразование второй производной дается формулой

$$\frac{d^2u'}{dx'^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + a\zeta_2, \text{ где } \zeta_2 \overset{def.}{=} \left.\frac{\partial\left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\right)}{\partial a}\right|_{a=o} = \left.\frac{\partial\psi(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2},a}{\partial a}\right|_{a=o}$$

Следовательно, инфинитезимальный оператор дважды продолженной группы $\underset{2}{G}$ равен:

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \zeta_2(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2})\,\partial_{d^2u/dx^2}, \text{ где } \zeta_2 = D(\zeta_1) - \frac{d^2u}{dx^2}D(\xi) \qquad (5.17)$$

Формулы (5.15) и (5.17) дают нам алгоритм построения первого $\underset{1}{X}$ и второго $\underset{2}{X}$ продолжения инфинитезимального оператора $X$ исходной группы точечных преобразований $G$. Аналогично может быть выписано $k$-ое продолжение $\underset{k}{X}$ инфинитезимального оператора $X$.

Выпишем в развернутом виде выражения для наиболее часто используемых в приложениях координат $\zeta_1, \zeta_2$ дважды продолженного оператора $X$:

$$\zeta_1 = D(\eta) - \frac{du}{dx}D(\xi) = \frac{\partial\eta}{\partial x} + (\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial x})\frac{du}{dx} - \frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2;$$
(5.18)

$$\zeta_2 = D(\zeta_1) - \frac{d^2u}{dx^2}D(\xi) = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (2\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial x} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2})\frac{du}{dx} + (\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial x})\left(\frac{du}{dx}\right)^2 -$$

$$-\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x} - 3\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)\frac{d^2u}{dx^2};$$
(5.19)

Для $k$- ого продолжения $\underset{k}{X} = \underset{k-1}{X} + \zeta_k(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2},...,\frac{d^ku}{dx^k})\,\partial_{d^ku/dx^k}$ инфинитезимального оператора $X$ соответствующая координата $\zeta_k$ вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$\zeta_k = D(\zeta_{k-1}) - \frac{d^k u}{dx^k} D(\xi)$$
(5.20)

*6. Определяющие уравнения*

Перейдем теперь к алгоритму вычисления основной группы точечных преобразований, допускаемых системой уравнений (4.3). Эту систему мы иногда для краткости будем записывать в виде векторного уравнения (4.2), подразумевая, что $\vec{F}$ - вектор с компонентами $F_1,...,F_s$, причем максимальный порядок входящих в них производных $p = \max\limits_{i=1\div s}(p_i)$. Как уже отмечалось, через $[F]$ будем обозначать дифференциальное многообразие, определяемое этой системой вместе со всеми дифференциальными следствиями (4.2').

Так как в уравнения (4.3) входят производные до порядка $p = \max\limits_{i=1\div s}(p_i)$ включительно (хотя некоторые из $F_k, k = 1\div s$ могут зависеть от производных меньшего порядка), то необходимо продолжить преобразования

$$(*) \begin{cases} x'^i = f^i(x,u,a),\ f^i\big|_{a=0} = x^i \\ u'^\alpha = \varphi^\alpha(x,u,a),\ \varphi^\alpha\big|_{a=0} = u^\alpha \end{cases},$$

"$p$" раз дифференцируя второе соотношение в (*) аналогично тому, как это делалось при выводе формул продолжения преобразований в разделе 5. Если преобразования (*) образовывали однопараметрическую группу $G$, то в результате продолжения получим однопараметрическую группу, которую мы обозначим $\underset{p}{G}$ и которая действует на все переменные $x,u,\underset{1}{u},...,\underset{p}{u}$. Инфинитезимальным оператором этой "$p$" раз продолженной группы $\underset{p}{G}$ будет оператор

$$\underset{p}{X} = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + ... + \zeta_{i_1...i_p}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1...i_p}^\alpha},$$

полученный путем $p$-кратного продолжения оператора $X$ группы $G$. Формула для высших продолжений оператора аналогична формуле вторых продолжений и дается следующей зависимостью в цепочке рекуррентных соотношений:

для 1-го продолжения: $\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j)$

для 2-го продолжения $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ki}^\alpha D_j(\xi^k)$

……………………………………………………..

для k-го продолжения $\zeta_{i_1...i_k}^\alpha = D_{i_k}(\zeta_{i_1...i_{k-1}}^\alpha) - u_{ji_1...i_{k-1}}^\alpha D_{i_k}(\xi^j)$

Будем говорить, что система дифференциальных уравнений (4.3) допускает группу $G$ точечных преобразований (*), если дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно продолженной группы $\underset{p}{G}$. Переформулировав теорему и критерий инвариантности многообразий, получим следующую теорему.

<u>Теорема</u>. Система дифференциальных уравнений (4.3) допускает основную группу $G$ с инфинитезимальным оператором $X$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\underset{p}{X}\Big|_{[F]}(F_k)=0,\ \text{где}\ k=1,...,s \qquad (6.1)$$

Эта теорема вместе с первой теоремой Ли (о восстановлении конечного вида преобразований по координатам инфинитезимального оператора) сводит задачу отыскания всех однопараметрических групп, допускаемых данной системой дифференциальных уравнений, к решению системы уравнений (6.1), называемых поэтому определяющими уравнениями. Согласно формулам 1-го, 2-го, … , k-го продолжения определяющие уравнения (6.1) представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений относительно координат $\xi^i,\eta^\alpha$ оператора $X$. Но так как эти координаты ищутся как функции от $x,u$ ($\xi^i=\xi^i(x,u);\eta^\alpha=\eta^\alpha(x,u)$), а в определяющие уравнения входят также и производные $\underset{1}{u},...,\underset{p}{u}$, то полученная система однородных дифференциальных уравнений относительно $\xi^i,\eta^\alpha$ будет переопределенной, что заметно облегчит их решение. Рассмотрим несколько примеров вычисления допускаемой группы, где в качестве исходного дифференциального уравнения будем рассматривать: а). нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, б). линейное уравнение в частных производных второго порядка - уравнение теплопроводности, часть группы преобразований которого мы уже нашли ранее из общих соображений.

*7. Вычисление основной группы точечных преобразований, допускаемой нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка*

Будем, как уже было определено, говорить, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x,u,\frac{du}{dx})=0 \qquad (7.1)$$

допускает основную группу $G$, если уравнение (7.1), рассматриваемое как уравнение двухмерной плоскости в пространстве трех независимых переменных $R^3(x,u,\frac{du}{dx})$, инвариантно относительно продолженной группы $\underset{1}{G}$.

Аналогично обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2})=0 \qquad (7.2)$$

допускает основную группу $G$, если уравнение (7.2), рассматриваемое как уравнение трехмерной плоскости в пространстве четырех независимых переменных $R^4(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2})$, инвариантно относительно дважды продолженной группы $\underset{2}{G}$.

Данное определение аналогичным образом обобщается на дифференциальные уравнения более высокого порядка.

Критерий инвариантности (6.1) для случая обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (7.2) записывается в виде

$$\underset{2}{X}\Big|_{[F]}(F) \equiv \left. \left( \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial u} + \zeta_1 \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{du}{dx}\right)} + \zeta_2 \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)} \right) \right|_{[F]} = 0 \qquad (7.3)$$

где координаты $\zeta_1, \zeta_2$ дважды продолженного оператора $\underset{2}{X}$ вычисляются по формулам (5.18), (5.19). Определяющее уравнение (7.3) служит уравнением для определения искомых координат $\xi = \xi(x,u), \eta = \eta(x,u)$ исходного инфинитезимального оператора $X$ допускаемой группы точечных преобразований.

Для упрощения выкладок будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, записанные в разрешенном относительно старшей производной виде:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x,u,\frac{du}{dx}) \qquad (7.4)$$

В этом случае определяющее уравнение (7.3) после подстановки значений $\zeta_1, \zeta_2$ из формул (5.18), (5.19) и замены $\frac{d^2u}{dx^2}$ на правую часть уравнения (7.4) принимает вид:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (2\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial x} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2})\frac{du}{dx} + (\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial x})\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 +$$

$$+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x} - 3\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)f - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + (\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial x})\frac{du}{dx} - \frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) -$$

$$-\xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \qquad (7.5)$$

Отметим, что в уравнении (7.5) функция $f(x,u,\frac{du}{dx})$ - известная из уравнения (7.4) функция своих аргументов (так называемая правая часть). Определяющее уравнение (7.5) служит для определения двух неизвестных функций $\xi = \xi(x,u), \eta = \eta(x,u)$. Поскольку определяющее уравнение (7.5) содержит, помимо искомых функций $\xi = \xi(x,u), \eta = \eta(x,u)$ и частных производных от них, еще и величины $\left(\frac{du}{dx}\right)^0, \left(\frac{du}{dx}\right)^1, \left(\frac{du}{dx}\right)^2, \left(\frac{du}{dx}\right)^3$, где $\frac{du}{dx}$ является независимой переменной в пространстве $R^4(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2})$, то определяющее уравнение будет “расщепляться” на четыре независимых уравнения соответственно числу степеней независимой переменной $\frac{du}{dx}$. В результате получим переопределенную систему четырех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно двух неизвестных функций $\xi = \xi(x,u), \eta = \eta(x,u)$. Решив эту систему, мы найдем выражения для координат $\xi = \xi(x,u), \eta = \eta(x,u)$ искомого инфинитезимального оператора $X$, т. е. найдем все допускаемые рассматриваемым о/д/у (7.4) операторы.

Рассмотрим в качестве примера обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{x}\frac{du}{dx} + e^u \qquad (7.6)$$

где правая часть $f(x,u) = -\frac{1}{x}\frac{du}{dx} + e^u$. Тогда определяющее уравнение (7.5) запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (2\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial x} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2})\frac{du}{dx} + (\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial x})\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 +$$

$$+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x} - 3\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)\left(-\frac{1}{x}\frac{du}{dx} + e^u\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + (\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial x})\frac{du}{dx} - \frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) -$$

$$-\xi\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} - \eta e^u = 0$$

Левая часть этого уравнения является многочленом третьей степени относительно переменной $\frac{du}{dx}$. Поэтому для выполнения условия равенства нулю левой части при любых значениях независимой переменной $\frac{du}{dx}$ нам потребуется приравнять нулю коэффициенты при различных степенях $\frac{du}{dx}$(здесь необходимо заметить, что остальные независимые переменные нашего четырехмерного пространства $R^4(x,u,\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2})$ в уравнении явным образом не участвуют, т. к. $\frac{d^2u}{dx^2}$ заменена на по критерию инвариантности на равную ей правую часть $f(x,u) = -\frac{1}{x}\frac{du}{dx} + e^u$, а независимые переменные $x,u$ в уравнение явным образом не входят). Таким образом, полученное определяющее уравнение "расщепляется" на четыре независимых уравнения:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3: \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} = 0 \qquad (7.7)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2: \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial x} + \frac{2}{x}\frac{\partial\xi}{\partial u} = 0 \qquad (7.8)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^1: \quad 2\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial x} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{x}\right) - 3\frac{\partial\xi}{\partial u}e^u = 0 \qquad (7.9)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^0: \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x} - \eta\right)e^u = 0 \qquad (7.10)$$

Выполним теперь интегрирование полученной системы (7.7)-(7.10) четырех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно двух неизвестных функций $\xi = \xi(x,u), \eta = \eta(x,u)$. Из уравнений (7.7) и (7.8) интегрированием по переменной $u$ получаем

$$\xi = p(x)u + a(x)$$

$$\eta = \left(\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x}\right)u^2 + 2\left(\frac{da}{dx} - \frac{a}{x}\right)u + q(x)u + b(x)$$

Подставим эти выражения для координат $\xi, \eta$ в уравнения (7.9) и (7.10). Сначала заметим, что $\xi$ и $\eta$ зависят от независимой переменной $u$ как полиномы первой и второй степени соответственно, а в левые части уравнений (7.9) и (7.10) входит $e^u$; поэтому, должны выполняться равенства

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x} - \eta = 0$$

Первое из них дает $p(x) \equiv 0$, т. е. $\xi(x) = a(x)$, с учетом которого второе равенство записывается в виде

$$\left[2\left(\frac{da}{dx} - \frac{a}{x}\right) + q\right]u - \left[2\left(\frac{da}{dx} - \frac{a}{x}\right) + q\right] + 2\frac{da}{dx} + b = 0$$

Расщепляя полученное условие относительно независимой переменной $u$, найдем, что

$$2\left(\frac{da}{dx} - \frac{a}{x}\right) + q = 0 \ \text{ и } \ 2\frac{da}{dx} + b = 0$$

Таким образом, $\xi(x) = a(x)$ и $\dfrac{d\eta}{dx} = -2\dfrac{da}{dx}$. Подставляя эти выражения в (7.9) получим о/д/у второго порядка:

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{da}{dx} - \dfrac{a}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = C_1 x \ln x + C_2 x$. При этом оставшееся уравнение (7.10) выполняется тождественно.

Итак, мы получили общее решение определяющих уравнений (7.7)-(7.10) в виде:

$\xi = C_1 x \ln x + C_2 x$,

$\eta = -2\left[C_1(1 + \ln x) + C_2\right]$, где $C_1, C_2$ - произвольные постоянные.

Ввиду линейности определяющих уравнений общее решение представляется в виде линейной комбинации двух независимых решений, отвечающих наборам произвольных постоянных $C_1 = 1, C_2 = 0$ и $C_1 = 0, C_2 = 1$:

$$\begin{cases} \xi_1 = x \ln x \\ \eta_1 = -2(1 + \ln x) \end{cases}, \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \xi_2 = x \\ \eta_2 = -2 \end{cases}.$$

Это означает, что исходное уравнение (7.6) допускает два линейно независимых оператора:

$$X_1 = x \ln x \frac{\partial}{\partial x} - 2(1 + \ln x)\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial u} \tag{7.11}$$

и что множество всех допускаемых операторов является двухмерным векторным пространством с базисом (7.11). Более того, оказывается, что множество решений определяющего уравнения образует алгебру Ли с бинарной операцией – коммутатором любой пары операторов вида:

$$[X_1,X_2]=X_1X_2-X_2X_1=\left(X_1(\xi_2)-X_2(\xi_1)\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(X_1(\eta_2)-X_2(\eta_1)\right)\frac{\partial}{\partial u}$$
(7.12)

Из определения коммутатора следует, что он

1). Билинеен $[X,c_1X_1+c_2X_2]=c_1[X,X_1]+c_2[X,X_2]$

2). Антисимметричен $[X,X_1]=-[X_1,X]$

3). Удовлетворяет тождеству Якоби:

$$[X_1,[X_2,X_3]]+[X_2,[X_3,X_1]]+[X_3,[X_1,X_2]]=0$$

*По определению*, алгеброй Ли операторов называется векторное пространство $L$, в которое наряду с любыми двумя операторами $X_1,X_2\in L$ входит также их коммутатор $[X_1,X_2]\in L$.

В нашем случае алгебры Ли $L_2$, образованной операторами (7.11) $X_1,X_2\in L_2$, коммутатор $[X_1,X_2]=-X_2\in L_2$, т. е. мы имеем двухмерную алгебру Ли.

Замечание: Приведенная выше процедура отыскания допускаемой алгебры Ли операторов, основанная на использовании определяющего уравнения, оказывается практически неэффективной применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка. Действительно, выпишем определяющее уравнение для уравнения первого порядка вида $\dfrac{du}{dx}=f(x,u)$:

$$\underset{1}{X}\Big|_{\frac{du}{dx}=f(x,u)}\left(\frac{du}{dx}-f(x,u)\right)\equiv\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)f-\frac{\partial\xi}{\partial u}f^2-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial u}=0$$
(7.13)

В уравнение (7.13) уже не входит явным образом переменная $\dfrac{du}{dx}$ и поэтому не происходит “расщепления” определяющего уравнения на несколько уравнений, образующих переопределенную систему. При заданной функции $f(x,u)$ определяющее уравнение (7.13) представляет из себя линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно двух неизвестных функций $\xi=\xi(x,u),\eta=\eta(x,u)$, которое имеет бесконечное множество решений. Поэтому, всякое обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов.

*8. Вычисление группы точечных преобразований, допускаемой уравнением линейной теплопроводности:*

$u_t-u_{xx}=0$, где $u=u(t,x)$ (8.1)

Запишем инфинитезимальный оператор искомой допускаемой группы $G$ в общем виде: $X=\ \xi^i(x,u)\partial_{x^i}+\eta^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}$, в нашем случае $i=2,\ \alpha=1$. Приняв для упрощения дальнейших выкладок следующие обозначения координат инфинитезимального оператора $\xi^1=\widetilde{t},x^1=t;\quad \xi^2=\widetilde{x},x^2=x;\quad \eta^1=\widetilde{u},u^1=u$, получим вид искомого оператора

$$X=\tilde{t}\,\partial_t+\tilde{x}\,\partial_x+\tilde{u}\,\partial_u,\quad \text{где}\quad \begin{array}{c}\tilde{t}\\ \tilde{x}\\ \tilde{u}\end{array}\Bigg\|\; t,x,u \qquad (8.2)$$

Далее, учитывая наличие в (8.1) производных $u_t, u_{xx}$, нам необходимо выписать 2-е продолжение оператора $X$.

Вспомним формулы теории продолжения:

$$X_2=X+\zeta_i^\alpha\partial_{u_i^\alpha}+\zeta_{ij}^\alpha\partial_{u_{ij}^\alpha}, \qquad (8.3)$$

$$\zeta_i^\alpha=D_i(\eta^\alpha)-u_j^\alpha D_i(\xi^j), \qquad (8.4)$$

$$\zeta_{ij}^\alpha=D_j(\zeta_i^\alpha)-u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k) \qquad (8.5)$$

$$D_i=\partial_{x^i}+u_i^\alpha\partial_{u^\alpha}+u_{ij}^\alpha\partial_{u_j^\alpha}+\ldots, \qquad (8.6)$$

В нашем случае: $\alpha=1$, поэтому этот индекс можно опустить. Индекс $i=1,2$ и, согласно принятым ранее обозначениям, $i=1$ соответствует переменной $t$; $i=2$ соответствует переменной $x$. Соответственно $\zeta_1=\tilde{u}_t$, $\zeta_2=\tilde{u}_x$, $\zeta_{22}=\tilde{u}_{xx}$.

Вычислим $\tilde{u}_t=\tilde{u}_t\,(t,x,u,u_t,u_x)$ при помощи (8.4):

$$\tilde{u}_t=D_t(\tilde{u})-u_tD_t(\tilde{t})-u_xD_t(\tilde{x})=$$
$$=\partial_t(\tilde{u})+u_t\partial_u(\tilde{u})-u_t(\partial_t(\tilde{t})+u_t\partial_u(\tilde{t}))-u_x(\partial_t(\tilde{x})+u_t\partial_u(\tilde{x})),\ \text{где}\ D_t=\partial_t+u_t\partial_u.$$

Теперь вычислим координату продолженного оператора $\tilde{u}_x$, где $\tilde{u}_x=\tilde{u}_x(t,x,u,u_t,u_x)$, при помощи формул продолжения (8.4):

$$\tilde{u}_x=D_x(\tilde{u})-u_tD_x(\tilde{t})-u_xD_x(\tilde{x})=$$
$$=\partial_x(\tilde{u})+u_x\partial_u(\tilde{u})-u_t(\partial_x(\tilde{t})+u_x\partial_u(\tilde{t}))-u_x(\partial_x(\tilde{x})+u_x\partial_u(\tilde{x})),\ \text{где}\ D_x=\partial_x+u_x\partial_u.$$

Остается вычислить координату $\tilde{u}_{xx}$ второго продолжения оператора $X$ при помощи формул (8.5) с использованием найденной координаты $\tilde{u}_x$: здесь

$$D_x=\partial_x+u_x\partial_u+u_{xt}\partial_{u_t}+u_{xx}\partial_{u_x}$$

$$\tilde{u}_{xx}=D_x(\tilde{u}_x)-u_{xt}D_x(\tilde{t})-u_{xx}D_x(\tilde{x})=$$
$$=\partial_x(\tilde{u}_x)+u_x\partial_u(\tilde{u}_x)+u_{xt}\partial_{u_t}(\tilde{u}_x)+u_{xx}\partial_{u_x}(\tilde{u}_x)-u_{xt}(\partial_x(\tilde{t})+u_x\partial_u(\tilde{t}))-u_{xx}(\partial_x(\tilde{x})+u_x\partial_u(\tilde{x}))=$$

(подставим найденное выше выражение для $\tilde{u}_x$)

$$=\partial_{xx}(\tilde{u})+u_x\partial_{ux}(\tilde{u})-u_t(\partial_{xx}(\tilde{t})+u_x\partial_{ux}(\tilde{t}))-u_x(\partial_{xx}(\tilde{x})+u_x\partial_{ux}(\tilde{x}))+u_x(\partial_{xu}(\tilde{u})+$$
$$+u_x\partial_{uu}(\tilde{u})-u_t(\partial_{xu}(\tilde{t})+u_x\partial_{uu}(\tilde{t}))-u_x(\partial_{xu}(\tilde{x})+u_x\partial_{uu}(\tilde{x})))+u_{xt}(-\partial_x(\tilde{t})-u_x\partial_u(\tilde{t}))+$$
$$+u_{xx}(\partial_u(\tilde{u})-u_t\partial_u(\tilde{t})-\partial_x(\tilde{x})-2u_x\partial_u(\tilde{x}))-u_{xt}(\partial_x(\tilde{t})+u_x\partial_u(\tilde{t}))-u_{xx}(\partial_x(\tilde{x})+u_x\partial_u(\tilde{x}))$$

Применим критерий инвариантности уравнения (8.1) по отношению к дважды продолженному оператору $\underset{2}{X}$ при условии выполнения уравнения (8.1):

$$\underset{2}{X}\Big|_{u_t-u_{xx}=0}(u_t-u_{xx})=0\ \Rightarrow\ (\tilde{u}_t-\tilde{u}_{xx})\big|_{u_t-u_{xx}=0}=0 \qquad (8.7)$$

Расщепляя полученное уравнение (8.7) по $u_x$, $u_x u_{xx}$, $u_x u_x$, ... , $u_{xt}$, $u_{xx}$, $u_{xt}u_x$ и т.д., получим систему определяющих уравнений на координаты $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(\tilde{u}) + u_{xx}\partial_u(\tilde{u}) - u_{xx}\left(\partial_t(\tilde{t}) + u_{xx}\partial_u(\tilde{t})\right) - \\
&- u_x(\partial_t(\tilde{x}) + u_{xx}\partial_u(\tilde{x})) - \partial_{xx}(\tilde{u}) - u_x\partial_{ux}(\tilde{u}) + u_{xx}(\partial_{xx}(\tilde{t}) + u_x\partial_{ux}(\tilde{t})) + u_x(\partial_{xx}(\tilde{x}) + u_x\partial_{ux}(\tilde{x})) - \\
&- u_x\{\partial_{xu}(\tilde{u}) + u_x\partial_{uu}(\tilde{u}) - u_{xx}\left(\partial_{xu}(\tilde{t}) + u_x\partial_{uu}(\tilde{t})\right) - u_x\left(\partial_{xu}(\tilde{x}) + u_x\partial_{uu}(\tilde{x})\right)\} + \\
&+ u_{xt}\left(\partial_x(\tilde{t}) + u_x\partial_u(\tilde{t})\right) - u_{xx}\{\partial_u(\tilde{u}) - u_{xx}\partial_u(\tilde{t}) - \partial_x(\tilde{x}) - 2u_x\partial_u(\tilde{x})\} + \\
&+ u_{xt}\left(\partial_x(\tilde{t}) + u_x\partial_u(\tilde{t})\right) + u_{xx}\left(\partial_x(\tilde{x}) + u_x\partial_u(\tilde{x})\right) = 0
\end{aligned}
$$

(Примечание: При подстановке в (8.7) выражений для координат $\tilde{u}_t$, $\tilde{u}_{xx}$ сразу будем заменять $u_t$ на $u_{xx}$ согласно уравнению (8.1))

Выпишем свободные члены: $\partial_t(\tilde{u}) - \partial_{xx}(\tilde{u}) = 0$

Выпишем члены при $u_{xx}$: $\quad \partial_u(\tilde{u}) - \partial_t(\tilde{t}) + \partial_{xx}(\tilde{t}) - \partial_u(\tilde{u}) + 2\partial_x(\tilde{x}) = 0$

Выпишем члены при $u_{xx}u_{xx}$: $\quad -\partial_u(\tilde{t}) + \partial_u(\tilde{t}) = 0$

Выпишем члены при $u_x$: $\quad -\partial_t(\tilde{x}) - \partial_{ux}(\tilde{u}) + \partial_{xx}(\tilde{x}) - \partial_{xu}(\tilde{u}) = 0$

Выпишем члены при $u_x u_{xx}$: $\quad -\partial_u(\tilde{x}) + \partial_{ux}(\tilde{t}) + \partial_{xu}(\tilde{t}) + 2\partial_u(\tilde{x}) + \partial_u(\tilde{x}) = 0$

Выпишем члены при $u_x u_x$: $\quad \partial_{ux}(\tilde{x}) - \partial_{uu}(\tilde{u}) + \partial_{xu}(\tilde{x}) = 0$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{Выпишем члены при } u_x u_x u_{xx} : \partial_{uu}(\tilde{t}) = 0 \Rightarrow \tilde{t} - \textit{линейная функция } u \\[2ex]
\text{Выпишем члены при } u_x u_x u_x : \partial_{uu}(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow \tilde{x} - \textit{линейная функция } u \\[2ex]
\text{Выпишем члены при } u_{xt} : \partial_x(\tilde{t}) + \partial_x(\tilde{t}) = 0 \Rightarrow \tilde{t} - \textit{не зависит от } x \\[3ex]
\text{Выпишем члены при } u_{xt}u_x : \partial_u(\tilde{t}) + \partial_u(\tilde{t}) = 0 \Rightarrow \tilde{t} - \textit{не зависит от } u
\end{array}
\right] (*)
$$

Перепишем систему определяющих уравнений (без последних четырех уравнений (*)):

$$
\begin{cases}
\partial_t(\tilde{u}) - \partial_{xx}(\tilde{u}) = 0 \\
2\partial_x(\tilde{x}) - \partial_t(\tilde{t}) + \partial_{xx}(\tilde{t}) = 0 \\
-\partial_t(\tilde{x}) + \partial_{xx}(\tilde{x}) - 2\partial_{ux}(\tilde{u}) = 0 \\
2\partial_{ux}(\tilde{t}) + 2\partial_u(\tilde{x}) = 2\partial_u(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow \partial_u(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow \tilde{x} - \textit{не зависит от } u \\
2\partial_{ux}(\tilde{x}) - \partial_{uu}(\tilde{u}) = \partial_{uu}(\tilde{u}) = 0 \Rightarrow \tilde{u} - \textit{линейная функция } u
\end{cases}
\qquad (8.9)
$$

Итак, мы получили:

$$
\begin{aligned}
\tilde{t} &= \tilde{t}(t) \\
\tilde{x} &= \tilde{x}(t, x) \qquad\qquad (**) \\
\tilde{u} &= a(t, x)u + b(t, x)
\end{aligned}
$$

С учетом (**) перепишем оставшуюся часть определяющей системы уравнений:

$(8.10_1)$ $\{\partial_t(a(t,x)) - \partial_{xx}(a(t,x))\}u + \partial_t(b(t,x)) - \partial_{xx}(b(t,x)) = 0$

$(8.10_2)$ $2\partial_x(\widetilde{x}) - \dfrac{d}{dt}(\widetilde{t}) = 0$ .

$(8.10_3)$ $-\partial_t(\widetilde{x}) + \partial_{xx}(\widetilde{x}) - 2\partial_x(a(t,x)) = 0$

Из $(8.10_1) \Rightarrow$ (расщепляем уравнение по $u$):

$$\begin{cases} \partial_t(a) - \partial_{xx}(a) = 0 & (8.10_{11}) \\ \partial_t(b) - \partial_{xx}(b) = 0 & (8.10_{12}) \end{cases}.$$

Из $(8.10_2)$ после дифференцирования по $x$:

$$2\partial_{xx}(\widetilde{x}) = \partial_x(\frac{d}{dt}(\widetilde{t})) = 0 \Rightarrow \widetilde{x} = c(t)x + d(t)$$

Тогда из $(8.10_2) \Rightarrow$ $2c(t) = \dfrac{d}{dt}(\widetilde{t})$

Из $(8.10_3) \Rightarrow -\dfrac{d(c)}{dt}x - \dfrac{d(d)}{dt} - 2\partial_x(a) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial_x(a) = -\tfrac{1}{2}(\frac{dc}{dt}x + \frac{d(d)}{dt}) \Rightarrow a = -\tfrac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\frac{dc}{dt} + \frac{d(d)}{dt}x) + e(t)$$

Подставим выражение для $a(t,x)$ в $(8.10_{11})$:

$$-\frac{x^2}{4}\frac{d^2c}{dt^2} - \frac{x}{2}\frac{d^2d}{dt^2} + \frac{de}{dt} + \tfrac{1}{2}\frac{dc}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2c}{dt^2} = 0, \frac{d^2d}{dt^2} = 0, \frac{de}{dt} + \tfrac{1}{2}\frac{dc}{dt} = 0;$$

$$\Rightarrow c = c_1t + c_2,\ d = c_3t + c_4,\ e = -\frac{1}{2}c_1t + c_5;$$

$$\Rightarrow \frac{d\widetilde{t}}{dt} = 2c(t) = 2c_1t + 2c_2 \Rightarrow \widetilde{t} = c_1t^2 + 2c_2t + c_6$$

$$\Rightarrow \widetilde{x} = (c_1t + c_2)x + c_3t + c_4$$

$\Rightarrow \widetilde{u} = a(t,x)u + b(t,x)$, где $a(t,x) = -\dfrac{x^2}{4}c_1 - \dfrac{x}{2}c_3 - \dfrac{1}{2}c_1t + c_5$,

$b(t,x)$ - произвольное решение уравнения теплопроводности: $\partial_t b - \partial_{xx}b = 0$.

Полагая весь набор произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_6$ и функции $b(t,x)$ равными нулю за исключением какой-либо одной произвольной постоянной или функции $b(t,x)$, выпишем базис допускаемой алгебры Ли операторов:

$c_4 \neq 0 : X_1 = \partial_x;$

$c_6 \neq 0 : X_2 = \partial_t;$

$c_5 \neq 0 : X_3 = u\partial_u;$

$c_2 \neq 0 : X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x;$

$c_3 \neq 0 : X_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u;$

$c_1 \neq 0 : X_6 = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u;$

$b \neq 0 : X_b = b(t,x)\partial_u;$

Обратим внимание, что при нумерации операторов $X_i$ мы не сохраняли соответствующие им номера произвольных постоянных $c_i$, а пронумеровали операторы в порядке удобства их дальнейшего использования. При записи операторов $X_5, X_6$, соответствующих произвольным постоянным $c_3, c_1$, мы использовали тот факт, что все операторы определены с точностью до умножения на произвольную отличную от нуля постоянную величину (константу). Заметим также, что за счет наличия функции $b(t,x)$ - произвольного решения уравнения теплопроводности в операторе $X_b$ получаемая алгебра Ли – бесконечномерна.

Итак, в результате полного решения системы определяющих уравнений нами найдена максимально широкая допускаемая алгебра Ли точечных преобразований для линейного уравнения теплопроводности (8.1).

Для изучения структуры найденной алгебры Ли операторов уравнения теплопроводности выпишем таблицу коммутаторов для алгебры Ли операторов $X_1,...,X_b$.

| $\lfloor X_i, X_j \rfloor$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | 0 | 0 | $X_1$ | $-X_3$ | $2X_5$ | $X_{\frac{\partial b}{\partial x}}$ |
| $X_2$ | 0 | 0 | 0 | $2X_2$ | $2X_1$ | $4X_4 - 2X_3$ | $X_{\frac{\partial b}{\partial t}}$ |
| $X_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-X_b$ |
| $X_4$ | $-X_1$ | $2X_6$ | 0 | 0 | $X_5$ | $2X_6$ | $X_c$ |
| $X_5$ | $X_3$ | $-2X_1$ | 0 | $-X_5$ | 0 | 0 | $X_d$ |
| $X_6$ | $-2X_5$ | $-4X_4 + 2X_3$ | 0 | $-2X_6$ | 0 | 0 | $X_e$ |
| $X_b$ | $-X_{\frac{\partial b}{\partial x}}$ | $-X_{\frac{\partial b}{\partial t}}$ | $X_b$ | $-X_c$ | $-X_d$ | $-X_e$ | 0 |

Где в таблице коммутаторов использованы обозначения:

$$c(t,x) = 2t\frac{\partial b}{\partial t} + x\frac{\partial b}{\partial x}, \quad d(t,x) = xb + 2t\frac{\partial b}{\partial x},$$

$$e(t,x) = (x^2 + 2t)b + 4t^2\frac{\partial b}{\partial t} + 4tx\frac{\partial b}{\partial x}$$

Обратим внимание на тот факт, что в таблице коммутаторов появились операторы аналогичные по виду оператору $X_b$, но вместо функции $b(t,x)$ в них участвуют функции $\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial t}, c(t,x), d(t,x), e(t,x)$. В виду замкнутости алгебры Ли операторов относительно групповой операции мы можем заключить, что если функция $b(t,x)$ - произвольное решение уравнения теплопроводности, то и функции $\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial t}, c(t,x), d(t,x), e(t,x)$ тоже являются решениями уравнения теплопроводности, впрочем этот факт можно проверить и непосредственной проверкой.

Выпишем в конечном виде точечные преобразования однопараметрических групп $G_i$, порождаемых соответствующими инфинитезимальными операторами $X_i$. Как обычно групповой параметр $a \in R^1$, $(t', x', u')$- образ точки $(t, x, u)$ при преобразовании $G_i$ для оператора $X_i$.

$$
\begin{aligned}
G_1 &: \quad (t', x', u') = (t, x + a, u) \\
G_2 &: \quad (t', x', u') = (t + a, x, u) \\
G_3 &: \quad (t', x', u') = (t, x, e^a u) \\
G_4 &: \quad (t', x', u') = (e^{2a} t, e^a x, u) \\
G_5 &: \quad (t', x', u') = (t, x + 2at, e^{-ax - a^2 t} u) \\
G_6 &: \quad (t', x', u') = \left(\frac{t}{1-4at}, \frac{x}{1-4at}, \sqrt{1-4at}\; e^{\frac{-ax^2}{1-4at}} u\right) \\
G_b &: \quad (t', x', u') = (t, x, u + a\, b(t, x))
\end{aligned}
$$

Теперь, зная конечный вид преобразований каждой однопараметрической группы симметрий $G_i$, мы можем выписать формулы производства решений из известного решения уравнения теплопроводности $u = f(t, x)$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= f(t, x - a) \\
u_2 &= f(t - a, x) \\
u_3 &= e^a f(t, x) \\
u_4 &= f(e^{-2a} t, e^{-a} x) \\
u_5 &= e^{-ax - a^2 t} f(t, x - 2at) \\
u_6 &= \frac{1}{\sqrt{1+4at}}\; e^{\frac{-ax^2}{1+4at}}\; f\left(\frac{t}{1+4at}, \frac{x}{1+4at}\right) \\
u_b &= f(t, x) + a\, b(t, x)
\end{aligned}
$$

где $a$ - как обычно произвольное вещественное число, а $b(t,x)$ - некоторое произвольное решение уравнения теплопроводности.

Полученные группы симметрий $G_i$ отражают различные свойства исходного уравнения теплопроводности. Так, группы $G_3, G_b$ отражают свойство линейности уравнения теплопроводности – мы можем складывать решения и умножать их на константы, т.е. линейная комбинация решений также дает решение уравнения теплопроводности.

Группы $G_1, G_2$ показывают инвариантность уравнения относительно переносов по пространству и времени, отражая тот факт, что изучаемое уравнение теплопроводности – это уравнение с постоянными коэффициентами. Инвариантность уравнения относительно преобразований растяжения-сжатия нашла свое отражение в группе $G_4$. Группа $G_5$ представляет из себя преобразование Галилея в подвижной системе координат. Группа преобразований $G_6$ является существенно локальной группой преобразований (о чем свидетельствуют радикал и дроби). Ее появление не очевидно из основных физических принципов, однако факт наличия группы преобразований $G_6$ приводит к следующему замечательному выводу. Выберем в соответствующей нашей группе формуле по производству решения в качестве исходного решения тождественно постоянное решение $u = f(t,x) = const$, тогда из формулы по производству решения следует, что функция

$$u_6 = \frac{const}{\sqrt{1+4at}}\ e^{\frac{-ax^2}{1+4at}}$$

тоже является решением уравнения теплопроводности. В частности, полагая $const = \sqrt{\dfrac{a}{\pi}}$, мы получаем фундаментальное решение уравнения теплопроводности в точке $(t_0, x_0) = (-\dfrac{1}{4a}, 0)$. Чтобы получить фундаментальное решение классического вида

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

нам дополнительно потребуется осуществить сдвиг по времени $t$, воспользовавшись группой $G_2$ с заменой группового параметра $a$ на величину $-\dfrac{1}{4a}$.

Наиболее общая однопараметрическая группа симметрий получается, если рассмотреть общую линейную комбинацию $c_1X_1 + \ldots + c_6X_6 + X_b$ допускаемых операторов, однако явные формулы для преобразований из этой группы очень сложны. Воспользуемся другим способом и представим произвольное преобразование нашей бесконечномерной группы как композицию из последовательного применения преобразований однопараметрических подгрупп $G_1, \ldots, G_6, G_b$. Тогда наиболее общее решение, получающееся из данного решения $u = f(t,x)$ преобразованиями из рассматриваемой группы, имеет вид

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4a_6t}}\ e^{a_3 - \frac{a_5x + a_6x^2 - a_5^2t}{1+4a_6t}}\ f\left(\frac{e^{-2a_4}t}{1+4a_6t} - a_2, \frac{e^{-a_4}(x-2a_5t)}{1+4a_6t} - a_1\right) + b(t,x),$$

где как обычно $a_1, \ldots, a_6$ - произвольные вещественные постоянные (групповые параметры соответствующих однопараметрических подгрупп), а $b(t,x)$ - произвольное решение уравнения теплопроводности.

*10. Упрощенный метод вычисления подгруппы точечных преобразований растяжения-сжатия, допускаемой исходной системой дифференциальных уравнений:*

Рассмотрим систему уравнений движения несжимаемой однородной линейно-вязкой жидкости для плоских нестационарных течений в приближении пограничного слоя в декартовой системе координат $Oxy$ (здесь и далее для упрощения записи примем следующие обозначения $x = x_1$, $y = x_2$, $u = u_1$, $v = u_2$):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad (10.1)$$

где $u = u(t,x,y), v = v(t,x,y)$ - компоненты скорости, $p = p(t,x,y)$- давление, $\mu, \rho$ - постоянные, соответствующие коэффициенту динамической вязкости и плотности жидкости, т. е. жидкость считается однородной и линейно-вязкой.

Ставится задача нахождения всех преобразований растяжения-сжатия, допускаемых системой уравнений (10.1), без применения полной процедуры вычисления допускаемой группы. Интерес к этой задаче вызван прежде всего тем фактом, что так называемые “автомодельные” (или “самоподобные” от английского “selfsimilar”) решения – это по сути своей решения инвариантные относительно подгруппы преобразований растяжения-сжатия.

Выпишем общий вид преобразования растяжения-сжатия зависимых и независимых переменных системы уравнений (10.1) (примечание: здесь, как и ранее, штрих - символом помечены преобразованные величины):

$$(10.2)\ \begin{cases} t' = e^{\tilde t}\, t \\ x' = e^{\tilde x}\, x \\ y' = e^{\tilde y}\, y \\ u' = e^{\tilde u}\, u \\ v' = e^{\tilde v}\, v \\ p' = e^{\tilde p}\, p \end{cases}$$ , где $\tilde t, \tilde x, \tilde y, \tilde u, \tilde v, \tilde p \in R^1$ - групповые параметры искомой подгруппы

Как видно из формул (10.2) положительные значения показателей у экспоненты $\tilde t, \tilde x, \tilde y, \tilde u, \tilde v, \tilde p > 0$ соответствуют преобразованиям растяжения, а отрицательные значения $\tilde t, \tilde x, \tilde y, \tilde u, \tilde v, \tilde p < 0$ - преобразованиям сжатия. Тождественное преобразование соответствует значениям $\tilde t, \tilde x, \tilde y, \tilde u, \tilde v, \tilde p = 0$.

Отметим также, что первоначально в формулах (10.2) мы полагаем все величины $\tilde t, \tilde x, \tilde y, \tilde u, \tilde v, \tilde p$ независимыми, однако требование инвариантности системы уравнений

(10.1) относительно преобразований (10.2), как мы сейчас увидим, приведет к определенным связям между этими групповыми параметрами.
Как нам уже известно, требование инвариантности системы (10.1) относительно преобразований (10.2) означает, что в преобразованных (штрихованных) переменных система уравнений (10.1) должна сохранять свой общий вид, т.е.:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y'}=0 \qquad (10.3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0$$

Теперь по обычным правилам преобразования производных при известных преобразованиях независимых и зависимых переменных (10.2) найдем связь между штрихованными и не штрихованными производными в системах (10.1) и (10.3):

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}=\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial u}{\partial t}=e^{\tilde{u}}e^{-\tilde{t}}\frac{\partial u}{\partial t}=e^{\tilde{u}-\tilde{t}}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}=\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\tilde{u}}e^{-\tilde{x}}\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\tilde{u}-\tilde{x}}\frac{\partial u}{\partial x},$$

аналогично находим преобразования остальных производных

$$\frac{\partial u'}{\partial y'}=e^{\tilde{u}-\tilde{y}}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x'}=e^{\tilde{p}-\tilde{x}}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y'}=e^{\tilde{p}-\tilde{y}}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}=e^{\tilde{u}-2\cdot\tilde{y}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Подставляя найденные выражения для штрихованных производных в систему (10.3) получим:

$$e^{\widetilde{u}-\widetilde{t}}\ \frac{\partial u}{\partial t}+e^{\widetilde{u}}e^{\widetilde{u}-\widetilde{x}}u\frac{\partial u}{\partial x}+e^{\widetilde{v}}e^{\widetilde{u}-\widetilde{y}}v\frac{\partial u}{\partial y}=e^{\widetilde{p}-\widetilde{x}}\ \cdot(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x})+e^{\widetilde{u}-2\cdot\widetilde{y}}\ \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$e^{\widetilde{p}-\widetilde{y}}\ \cdot(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y})=0 \qquad (10.4)$$

$$e^{\widetilde{u}-\widetilde{x}}\ \frac{\partial u}{\partial x}+e^{\widetilde{v}-\widetilde{y}}\ \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Требование инвариантной формы записи системы уравнений (10.1) как в штрихованных, так и в не штрихованных переменных налагает на систему (10.4) требование, чтобы появившиеся в уравнениях дополнительные экспоненциальные сомножители при каждом из слагаемых в соответствующем уравнении были тождественно равны. В противном случае система (10.4) не примет вид исходной системы (10.1). Исходя из этого требования, получаем следующие цепочки уравнений:

$$\begin{cases} e^{\widetilde{u}-\widetilde{t}}\ =e^{\widetilde{u}}e^{\widetilde{u}-\widetilde{x}}\ =e^{\widetilde{v}}e^{\widetilde{u}-\widetilde{y}}\ =e^{\widetilde{p}-\widetilde{x}}\ =e^{\widetilde{u}-2\cdot\widetilde{y}} \\ e^{\widetilde{u}-\widetilde{x}}\ =e^{\widetilde{v}-\widetilde{y}} \end{cases} \qquad (10.5)$$

Второе уравнение системы (10.4) выполняется при любых значениях $\widetilde{p},\ \widetilde{y}$, т. к. одночленное однородное уравнение всегда можно умножить(поделить) на произвольный отличный от нуля множитель. Прологарифмировав систему (10.5), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \widetilde{u}-\widetilde{t}\ =2\cdot\widetilde{u}-\widetilde{x}=\widetilde{v}+\widetilde{u}-\widetilde{y}=\widetilde{p}-\widetilde{x}=\widetilde{u}-2\cdot\widetilde{y} \\ \widetilde{u}-\widetilde{x}=\widetilde{v}-\widetilde{y} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \widetilde{u}-\widetilde{t}\ =2\cdot\widetilde{u}-\widetilde{x}\Rightarrow\widetilde{u}=\widetilde{x}-\widetilde{t} & (10.6^1) \\ 2\cdot\widetilde{u}-\widetilde{x}=\widetilde{v}+\widetilde{u}-\widetilde{y}\Rightarrow\widetilde{v}=\widetilde{u}+\widetilde{y}-\widetilde{x}=\left\langle \text{с учетом } (10.6^1)\right\rangle=\widetilde{y}-\widetilde{t} & (10.6^2) \\ \widetilde{v}+\widetilde{u}-\widetilde{y}=\widetilde{p}-\widetilde{x}\ \Rightarrow\widetilde{p}=\widetilde{v}+\widetilde{u}-\widetilde{y}+\widetilde{x}=\left\langle \text{с учетом } (10.6^1),(10.6^2)\right\rangle=2\widetilde{x}-2\widetilde{t} & (10.6^3) \\ \widetilde{p}-\widetilde{x}=\widetilde{u}-2\cdot\widetilde{y}\Rightarrow\widetilde{p}=\widetilde{u}-2\widetilde{y}+\widetilde{x}=\left\langle \text{с учетом } (10.6^1)\right\rangle=2\widetilde{x}-2\widetilde{y}-\widetilde{t} & (10.6^4) \\ \widetilde{u}-\widetilde{x}=\widetilde{v}-\widetilde{y}\Rightarrow \text{с учетом } (10.6^1),(10.6^2):\widetilde{x}-\widetilde{t}-\widetilde{x}=\widetilde{y}-\widetilde{t}-\widetilde{y}\Rightarrow-\widetilde{t}=-\widetilde{t}\ \text{(ттождеств)} \end{cases}$$

Итак, мы получили систему из 4-х линейно независимых уравнений $(10.6^1)$–$(10.6^4)$ для 6-ти искомых переменных $\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{p}$. Примем переменные $\widetilde{t},\widetilde{x}$ за свободные и выразим остальные через них. Для этого заметим вначале, что в уравнениях $(10.6^3)$–$(10.6^4)$ левые части равны, поэтому $2\widetilde{x}-2\widetilde{t}=2\widetilde{x}-2\widetilde{y}-\widetilde{t}\Rightarrow 2\widetilde{y}=\widetilde{t}$ и далее система $(10.6^1)$–$(10.6^4)$ примет вид:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t} & (10.6^1) \\ \tilde{v} = -\frac{1}{2}\tilde{t} & (10.6^2) \\ \tilde{p} = 2\tilde{x} - 2\tilde{t} & (10.6^3) \\ \tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{t} & (10.6^4) \end{cases}$$

Вспомним теперь, что $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ - это групповые параметры записанного в общем виде преобразования (10.2) для системы уравнений (10.1). Обозначив для удобства дальнейших выкладок две свободные переменные (два независимых групповых параметра) $\tilde{t}, \tilde{x}$ в виде $\tilde{t} = 2a, \tilde{x} = b,$ *где* $a, b \in R^1$, мы получаем двухпараметрическую подгруппу преобразований растяжения-сжатия:

$$\begin{cases} \tilde{t} = 2a \\ \tilde{x} = b \\ \tilde{y} = a \\ \tilde{u} = b - 2a \\ \tilde{v} = -a \\ \tilde{p} = 2b - 4a \end{cases} \quad \text{или в конечном виде} \quad \begin{cases} t' = e^{2a} t \\ x' = e^{b} x \\ y' = e^{a} y \\ u' = e^{b-2a} u \\ v' = e^{-a} v \\ p' = e^{2b-4a} p \end{cases} \qquad (10.7)$$

Принимая последовательно $a \neq 0, b = 0$ è $a = 0, b \neq 0$, выпишем в конечном виде две допускаемые системой уравнений (10.1) однопараметрические подгруппы преобразований растяжения-сжатия:

$$\begin{cases} t' = e^{2a} t \\ x' = x \\ y' = e^{a} y \\ u' = e^{-2a} u \\ v' = e^{-a} v \\ p' = e^{-4a} p \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t' = t \\ x' = e^{b} x \\ y' = y \\ u' = e^{b} u \\ v' = v \\ p' = e^{2b} p \end{cases} \quad \text{где } a, b \in R^1 \qquad (10.8)$$

Никаких других преобразований растяжения-сжатия исходная система уравнений (10.1) не допускает. Отметим также тот факт, что найденная подгруппа (10.7) для нестационарной системы (10.1) позволяет легко получить подгруппу преобразований растяжения-сжатия для стационарной системы: для этого достаточно вычеркнуть преобразования времени $t$ в формулах (10.7) или (10.8), а остальные строки оставить без изменения.

Проиллюстрируем применение найденных преобразований растяжения-сжатия (10.7) на примере построения автомодельного решения в классической задаче Блазиуса.

Постановка задачи: рассматривается установившееся обтекание абсолютно гладкой тонкой пластинки – полуплоскости $y = 0, x \geq 0$-несжимаемой однородной вязкой жидкостью. Скорость набегающего потока $\vec{U} = (U_0, 0),\, где\, U_0 \geq 0$ постоянна и направлена по оси $Ox$ (по пластине). Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U_0 L}{\mu}$, вычисленное по скорости набегающего потока $U_0$ и характерной длине $L$, считается достаточно большим. Ставится задача определения величины вязкого трения на поверхности пластинки. Известно, что решение для такой постановки можно искать в приближении теории пограничного слоя. Система уравнений для течения жидкости в узкой области вблизи поверхности пластины (называемой пограничным слоем) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
& u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\
& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
\end{aligned}
\qquad (10.9)
$$

Так как влияние сил вязкого трения сказывается только в узкой области вблизи пластины, то внешнее течение можно считать невязким и удовлетворяющим системе уравнений Эйлера. Но внешнее течение в задаче считается заданным течением с постоянным значением скорости $\vec{U} = (U_0, 0),\, где\, U_0 \geq 0$. Тогда из системы уравнений Эйлера следует, что $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \;\; и \;\; \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$, т.е. давление $p$ во внешнем потоке всюду постоянно. Но второе уравнение системы (10.9) говорит, что давление всюду внутри пограничного слоя по вертикали постоянно и равно давлению во внешнем потоке, т.е. также постоянно во всей области пограничного слоя. Поэтому член $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ в первом уравнении системы (10.9) тождественно равен нулю. Тогда наша система (10.9) вместе с краевыми условиями принимает вид:

$$
\begin{cases}
u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0
\end{cases}
\qquad (10.10)
$$

$$y = 0, x \geq 0: \quad u = v = 0 \qquad (10.11)$$

$$y = \infty: \quad u = U_0 \qquad (10.12)$$

Краевое условие (10.11) означает условие прилипание жидкости на поверхности пластины.
Краевое условие (10.12) означает равенство продольной составляющей вектора скорости $u$ на внешней границе пограничного слоя аналогичной составляющей внешнего потока $U_0$. Попробуем найти автомодельное (т.е. инвариантное относительно преобразований растяжения-сжатия (10.7)) решение краевой задачи (10.10),( 10.11),( 10.12) . Как было показано выше система уравнений (10.10) инвариантна относительно преобразований (10.7). Остается проверить инвариантность краевых условий. Начнем с (10.10): под действием преобразований

$$\begin{cases} x' = e^b x \\ y' = e^a y \\ u' = e^{b-2a} u \\ v' = e^{-a} v \\ p' = e^{2b-4a} p \end{cases} \qquad (10.13)$$

нетрудно убедиться, что поверхность пластины $y = 0, x \geq 0$ переходит в преобразованную поверхность $y' = 0, x' \geq 0$ при любых значениях $a, b$, т. е. инвариантность границы выполнена. Условия прилипания на этой границы также инвариантны при любых значениях $a, b$ ( $u = v = 0$ переходят в $u' = v' = 0$). Перейдем теперь к условиям (10.12):
граница $y = \infty$ переходит в $y' = \infty$ при любых конечных значениях $a, b$ в силу (10.13). А вот краевое условие для продольной компоненты скорости $u = U_0$ переходит в аналогичное условие для преобразованных переменных $u' = U_0$ только при условии тождественного преобразования продольной компоненты скорости, что имеет место для любых значений $a, b$ лишь при выполнении тождества $b = 2a$ в (10.13). С учетом этого тождества формулы (10.13) принимают вид:

$$\begin{cases} x' = e^{2a} x \\ y' = e^a y \\ u' = u \\ v' = e^{-a} v \\ p' = p \end{cases} \qquad (10.14)$$

Найдем теперь из (10.14) такие комбинации независимых и зависимых + независимых переменных, которые не меняются (остаются инвариантными) при любых значениях параметра $a \in R^1$. Нетрудно заметить, что независимые переменные в комбинации –

$\dfrac{y'}{\sqrt{x'}} = \dfrac{e^a y}{\sqrt{e^{2a} x}} \quad \Rightarrow \dfrac{y'}{\sqrt{x'}} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ инвариантны для любых значений $a \in R^1$.

Далее, $u$ и $p$ изначально в (10.14) инвариантны для любых значений $a \in R^1$.

А для поперечной компоненты скорости $v$ комбинация вида $v' \cdot \sqrt{x'} = e^{-a} v \cdot \sqrt{e^{2a} x} \quad \Rightarrow v' \cdot \sqrt{x'} = v \cdot \sqrt{x}$ обеспечит свойство инвариантности для любых значений $a \in R^1$.

Таким образом, автомодельное решение поставленной краевой задачи (10.10), ( 10.11), (10.12) следует искать в виде:

$$u = f(\xi), \quad v = \frac{1}{\sqrt{x}} \phi(\xi), \quad где \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{x}} \qquad (10.15)$$

Подстановка (10.15) во второе уравнение системы (10.10) – условие несжимаемости дает:

$$\frac{df}{d\xi} \frac{y}{x^{3/2}} (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d\phi}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad или \quad -\frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \qquad (10.16)$$

Аналогично, подставляя выражения для продольной и поперечной компонент скорости (10.15) в первое из уравнений системы (10.10)- уравнение движения в проекции на ось абсцисс, получаем:

$$f \frac{df}{d\xi} \frac{y}{x^{3/2}} (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{x}} \phi \frac{df}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{1}{x} \, или - \frac{1}{2} \xi f \frac{df}{d\xi} + \phi \frac{df}{d\xi} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \, (10.17)$$

Граничные условия (10.11), (10.12) в терминах переменных (10.15) примут вид:

$$f(\xi) = 0, \quad \phi(\xi) = 0, \quad при \quad \xi = 0$$

$$и \qquad (10.18)$$

$$f(\xi) = U_0 \; при \quad \xi = \infty$$

Итак, решение задачи Блазиуса сводится к решению следующей двухточечной краевой задачи (10.19), (10.20) для системы двух уравнений (10.19) относительно двух функций $f(\xi), \phi(\xi)$ с краевыми условиями (10.20):

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \\ -\frac{1}{2} \xi f \frac{df}{d\xi} + \phi \frac{df}{d\xi} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \end{cases} \qquad (10.19)$$

$$\begin{cases} при \quad \xi = 0: \quad f(\xi) = 0, \quad \phi(\xi) = 0 \\ при \quad \xi = \infty: \quad f(\xi) = U_0 \; при \quad \xi = \infty \end{cases} \qquad (10.20)$$

Итак, как мы видим, полученный функциональный вид (10.15) искомого автомодельного решения в результате подстановки в исходную систему (10.10) и краевые условия (10.11-10.12) приводит к соотношениям (10.19-10.20), содержащим только автомодельную переменную $\xi$ и искомые автомодельные функции $f(\xi),\ \phi(\xi)$ и не содержащим первоначальные переменные $x, y, u, v$.

Дальнейшее решение задачи подразумевает нахождение аналитического или численного решения системы уравнений (10.19), удовлетворяющего краевым условиям (10.20). Одним из способов нахождения аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений является использование их свойств симметрии. Так в случае нашей системы (10.19) справедливы следующие рассуждения. При построении редуцированной системы (10.19) из системы (10.10) мы воспользовались частным случаем общего двухпараметрического преобразования растяжения-сжатия (10.13) при $b = 2a$, т. е. однопараметрическим преобразованием растяжения-сжатия вида (10.14). Но ведь система (10.19) – суть следствие системы (10.10), поэтому можно ожидать, что у (10.19) осталось еще одно однопараметрическое преобразование растяжения-сжатия. Проверим это предположение: как и ранее, запишем общий вид преобразования растяжения-сжатия в экспоненциальном представлении

(10.21) $$\begin{cases} \xi' = e^{\tilde{\xi}}\,\xi \\ f' = e^{\tilde{f}}\,f \\ \phi' = e^{\tilde{\phi}}\,\phi \end{cases}$$ , где $\tilde{\xi}, \tilde{f}, \tilde{\phi} \in R^1$ - групповые параметры искомой подгруппы растяжения-сжатия.

Находя, аналогично тому, как было показано выше, связь между преобразованными (штрихованными) и не преобразованными (не штрихованными) производными получим:

$$\frac{df'}{d\xi'} = e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}}\,\frac{df}{d\xi},$$
$$\frac{d\phi'}{d\xi'} = e^{\tilde{\phi}-\tilde{\xi}}\,\frac{d\phi}{d\xi}, \qquad (10.22)$$
$$\frac{d^2 f'}{d\xi'^2} = e^{\tilde{f}-2\tilde{\xi}}\,\frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

Требование инвариантности системы (10.19) относительно преобразований (10.21) означает, что в преобразованных (штрихованных) переменных система уравнений (10.19) должна сохранять свою форму записи. Заменяя штрихованные значения производных по формулам (10.22) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\xi\, e^{\tilde{\xi}}\,\frac{df}{d\xi}\,e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}} + \frac{d\phi}{d\xi}\,e^{\tilde{\phi}-\tilde{\xi}} = 0 \\ -\frac{1}{2}\xi\, e^{\tilde{\xi}}\,f\,e^{\tilde{f}}\,\frac{df}{d\xi}\,e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}} + \phi\, e^{\tilde{\phi}}\,\frac{df}{d\xi}\,e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}} = \frac{\mu}{\rho}\frac{d^2 f}{d\xi^2}\,e^{\tilde{f}-2\tilde{\xi}} \end{cases} \qquad (10.23)$$

Требование инвариантной формы записи системы уравнений (10.19) как в штрихованных, так и в не штрихованных переменных налагает на систему (10.23) требование, чтобы появившиеся в уравнениях дополнительные экспоненциальные сомножители при каждом из слагаемых в соответствующем уравнении были все тождественно равны. В противном случае система (10.23) не примет вид исходной системы (10.19). Исходя из этого требования, находим следующие цепочки уравнений:

$$\begin{cases} e^{\tilde{\xi}}\, e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}} = e^{\tilde{\phi}-\tilde{\xi}} \\ e^{\tilde{\xi}}\, e^{\tilde{f}}\, e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}} = e^{\tilde{\phi}}\, e^{\tilde{f}-\tilde{\xi}} = e^{\tilde{f}-2\tilde{\xi}} \end{cases} \qquad (10.24)$$

или, приведя подобные члены и прологарифмировав:

$$\begin{cases} \tilde{f} = \tilde{\phi} - \tilde{\xi} \\ 2\tilde{f} = \tilde{\phi} + \tilde{f} - \tilde{\xi} = \tilde{f} - 2\tilde{\xi} \end{cases} \qquad (10.25)$$

Система линейных алгебраических уравнений (10.25) содержит всего два независимых уравнения относительно трех неизвестных $\tilde{\xi}, \tilde{f}, \tilde{\phi}$ решение которых находится без труда:

$$\begin{cases} \tilde{f} = -2\,\tilde{\xi} \\ \tilde{\phi} = -\tilde{\xi} \end{cases}$$ , где $\tilde{\xi} \in R^1$ - групповой параметр

или, восстанавливая преобразования в конечном виде, получим (здесь мы обозначили $a = \tilde{\xi}$ ):

$$\begin{cases} \xi' = e^{a}\xi \\ f' = e^{-2a} f \\ \phi' = e^{-a}\phi \end{cases} \qquad (10.26)$$

Итак, нами найдено, что преобразования растяжения-сжатия (10.26) оставляют инвариантной систему уравнений (10.19). Но поставленная краевая задача включает в себя помимо системы уравнений (10.19) также краевые условия (10.20). Поэтому теперь нам необходимо проверить их инвариантность относительно найденных преобразований растяжения-сжатия (10.26). Для этого запишем условия (10.20) в преобразованных (штрихованных) переменных:

$$\begin{cases} при \quad \xi' = 0: \quad f'(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0 \\ при \quad \xi' = \infty: \quad f'(\infty) = U_0 \end{cases} \qquad (10.27)$$

Подставляя в (10.27) выражения для штрихованных переменных из (10.26) найдем:

$$\begin{cases} при \quad e^{a}\xi = 0: \quad e^{-2a} f(e^{a}\cdot 0) = 0, \quad e^{-a}\phi(e^{a}\cdot 0) = 0 \\ при \quad e^{a}\xi = \infty: \quad e^{-2a} f(e^{a}\cdot\infty) = U_0 \end{cases} \qquad (10.28)$$

Далее учитывая, что параметр $a$ может принимать произвольные, но конечные вещественные значения, получим:

$$\begin{cases} при \quad \xi = 0: \quad f(0) = 0, \quad \phi(0) = 0 \\ при \quad \xi = \infty: \quad f(\infty) = U_0 \cdot e^{2a} \end{cases} \qquad (10.29)$$

Из (10.29) видно, что первое краевое условие сохранило свой вид под действием преобразований (10.26), т.е. оно инвариантно при любых значениях параметра $a$. А вот второе краевое условие – нет, т. к. в правой части появился дополнительный множитель $e^{2a}$, вообще говоря, не равный 1. Если потребовать равенство этого дополнительного множителя 1, то отсюда следует, что $a = 0$, и, следовательно, преобразование вырождается в тривиальное тождественное преобразование. Отсюда следует вывод, что краевая задача (10.19), (10.20) не имеет автомодельного (т.е. инвариантного относительно преобразований растяжения-сжатия) решения.

Однако проделанная нами работа была выполнена не напрасно. Потому что найденная однопараметрическая подгруппа преобразований растяжения-сжатия (10.26) позволяет, во-первых, существенно упростить численное решение двухточечной краевой задачи (10.19), (10.20), а, во-вторых, получить точное аналитическое решение системы уравнений пограничного слоя (10.10).
Рассмотрим вначале вопрос численного решения двухточечной краевой задачи (10.19), (10.20).
Обычно задачи для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, заданными на двух концах интервала интегрирования, численно решаются при помощи метода стрельбы. Для этого на левом конце интервала (в нашем случае при $\xi = 0$) задают недостающие для корректной постановки задачи Коши начальные значения искомых функций (в нашем случае следует задать значение $\frac{df}{d\xi}$ при $\xi = 0$). Далее одним из известных численных методов (например, методом Рунге-Кутты) осуществляют интегрирование задачи Коши для системы на заданном интервале и получают значение искомой функции на правом конце интервала. Сравнивая полученное значение с заданным краевым условием, корректируют выбранные начальные значения и вновь численно интегрируют. Предполагая непрерывную зависимость получаемых значений на правом конце интервала интегрирования от задаваемых на левом конце начальных условий, строится алгоритм нахождения искомого недостающего начального значения с заданной степенью точности. Как видно из приведенного алгоритма, численное решение просто задачи Коши существенно легче решения двухточечной краевой задачи. Покажем теперь, как знание преобразований растяжения-сжатия, допускаемых системой (10.19) позволяет свести решение двухточечной краевой задачи (10.19),( 10.20) к решению задачи Коши. Для этого зададим недостающее начальное значение $\frac{df}{d\xi}$=1 при $\xi = 0$. Выбор значения равного 1, как станет далее понятно, не принципиален. Далее одним из известных численных методов (например, методом Рунге-Кутты) осуществим численное интегрирование поставленной задачи Коши для системы (10.19),( 10.20) с дополнительным начальным условием $\frac{df}{d\xi}$=1 при $\xi = 0$.

В нашей задаче правый конец интервала интегрирования - $\xi = \infty$, поэтому интегрирование будем осуществлять вплоть до такого значения $\xi_*$ , при котором

$\left|\dfrac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{f(\xi_1)}\right| < \varepsilon,\quad \textit{при}\quad \xi_1, \xi_2 > \xi_*,\quad \textit{где}\quad \varepsilon$ - заданная точность реализации правого граничного условия. Т.е. мы находим такую точку $\xi_*$ правее которой величина $f(\xi)$ меняется очень слабо. Вспомним теперь, что под действием преобразований (10.26) система уравнений (10.19) и первое условие в (10.20) остаются неизменными (инвариантными), а второе условие в (10.20) преобразуется по правилу (заметим, что у нас роль бесконечности играет величина $\xi_*$):

$$\textit{при}\quad e^a\cdot\xi=\xi_*:\quad f(\xi_*)=U_0\cdot e^{2a} \qquad (10.30)$$

Вспомним также, что под действием преобразований (10.26) обыкновенные производные от искомых функций, участвующие в нашей краевой задаче, преобразуются согласно формулам (10.22). Нас интересует как преобразуется уравнение $\dfrac{df}{d\xi}=1$ , определяющее при $\xi=0$ недостающее начальное условие. Для этого запишем, как и выше, это условие в штрихованных переменных: при $\xi'=0:\ \dfrac{df'}{d\xi'}=1$.

Далее зная из (10.22),( 10.26), что $\dfrac{df'}{d\xi'}=e^{-3a}\dfrac{df}{d\xi}$ и $\xi'=e^a\xi$ получим

$$\textit{при}\ e^a\cdot\xi=0:\quad e^{-3a}\cdot\frac{df}{d\xi}=1\quad\Rightarrow\quad \textit{при}\ \xi=0:\quad \frac{df}{d\xi}=e^{3a} \qquad (10.31)$$

Но величина $f(\xi_*)$ в (10.30) нам известна из численного расчета задачи Коши, $U_0$ известна по постановке задачи, следовательно, мы можем однозначно определить величину параметра $a$ равную

$a=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{f(\xi_*)}{U_0})$ и значит при помощи (10.31) мы можем определить величину

$$\textit{при}\ \xi=0:\quad \frac{df}{d\xi}=e^{3a}=e^{\frac{3}{2}\ln(\frac{f(\xi_*)}{U_0})}=\sqrt{\left(\frac{f(\xi_*)}{U_0}\right)^3} \qquad (10.32)$$

Использование начального условия (10.32) при повторном численном решении задачи Коши для системы (10.19) с первым условием из (10.20) в результате расчета даст искомое краевое условие на правом конце интервала интегрирования

$$\textit{при}\quad \xi=\xi_*\cdot\sqrt{\frac{U_0}{f(\xi_*)}}:\quad f(\xi_*)=U_0.$$

Как видно из этого примера, частичная не инвариантность краевой задачи (10.19),( 10.20) относительно найденной подгруппы растяжений - сжатия, допускаемой системой (10.19), позволила существенно упростить ее численное решение. Искомая в задаче величина вязкого трения $\tau = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$ на поверхности пластинки равна

$$\tau = \mu \left.\frac{df}{d\xi}\right|_{\xi=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \mu \sqrt{\left(\frac{f(\xi_*)}{U_0}\right)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Приступим теперь к построению точного аналитического решения системы уравнений пограничного слоя (10.10) . Для этого найдем из соотношений (10.26) такие комбинации независимых и зависимых переменных, которые не меняются (остаются инвариантными) при любых значениях параметра $a \in R^1$. Нетрудно заметить, что переменные в комбинации –

$$f'(\xi')^2 = e^{-2a} f \ (e^a \xi)^2 \quad \Rightarrow f'(\xi')^2 = f \ \xi^2$$

и

$$\phi' \xi' = e^{-a} \phi \ e^a \xi \quad \Rightarrow \phi' \xi' = \phi \ \xi$$

инвариантны для любых значений группового параметра $a \in R^1$. Но если комбинации $f \cdot \xi^2$ и $\phi \cdot \xi$ остаются неизменными под действием преобразования (10.26), то это означает, что $f \cdot \xi^2 = C_1$ и $\phi \cdot \xi = C_2$, где $C_1, C_2$ - произвольные постоянные. Т.е. мы нашли функциональный вид возможных решений системы (10.19):

$$\begin{cases} f = C_1 \cdot \xi^{-2} \\ \phi = C_2 \cdot \xi^{-1} \end{cases} \qquad (10.33)$$

Подстановка (10.33) в (10.19) после несложных преобразований дает (тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$ мы не рассматриваем):

$C_1 = C_2 = -\frac{6\mu}{\rho}$, т. е. действительно система обыкновенных дифференциальных уравнений (10.19) имеет автомодельное решение и это автомодельное решение находится в аналитическом виде (10.33)

Восстановим найденное решение в первоначальных размерных переменных. Получим следующие выражения для компонент вектора скорости:

$$u = -\frac{6\mu}{\rho}\frac{x}{y^2}, \quad v = -\frac{6\mu}{\rho}\frac{1}{y} \qquad (10.34)$$

Несложно убедиться прямой подстановкой (10.34) в (10.10), что найденные выражения тождественно удовлетворяют системе уравнений (10.10). Однако к сожалению, найденное аналитическое решение (10.34) не удовлетворяет краевым условиям (10.11-12),что приводит нас к выводу о необходимости численного решения задачи (10.19)-(10.20).

*11.Примеры результатов вычислений групп точечных преобразований, допускаемых известными моделями (системами дифференциальных уравнений) механики сплошных сред:*

11.1 Линеаризованная модель распространения малых возмущений
(Волновое уравнение для плоского случая в декартовой системе координат)

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \qquad (11.1.1)$$

где $u = u(t, x, y)$ является, например, потенциалом малых возмущений.

Как показывают непосредственные вычисления, допускаемая уравнением (1.11.1) группа точечных преобразований является бесконечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли образована 12 операторами вида:

$X_1 = \partial_t$ - оператор переноса (сдвига) по времени: $(t', x', y', u') = (t + a, x, y, u)$

$X_2 = \partial_x$ - оператор переноса (сдвига) по координате $x$: $(t', x', y', u') = (t, x + a, y, u)$

$X_3 = \partial_y$ - оператор переноса (сдвига) по координате $y$: $(t', x', y', u') = (t, x, y + a, u)$

$X_4 = y\partial_x - x\partial_y$ - оператор вращения в плоскости

$$R^2(x, y) : \begin{cases} t' = t, u' = u \\ x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \end{cases}$$

$X_5 = t\partial_x + x\partial_t$ -оператор “гиперболического вращения”

в $R^2(t, x) : \begin{cases} t' = xsha + tcha \\ x' = xcha + tsha \\ y' = y, u' = u \end{cases}$

$X_6 = t\partial_y + y\partial_t$ -оператор “гиперболического вращения” в плоскости $R^2(t, y)$ типа $X_5$

$X_7 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = e^a t \\ x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = u \end{cases}$

$X_8 = 2xt\partial_t + (x^2 - y^2 + t^2)\partial_x + 2xy\partial_y - xu\partial_u$ -оператор типа “преобразования инверсии” в пространстве $R^3(t,x,y)+R^1(u)$: $\begin{cases} t' = \dfrac{t}{1-2ax-a^2(t^2-x^2-y^2)} \\ x' = \dfrac{x+a(t^2-x^2-y^2)}{1-2ax-a^2(t^2-x^2-y^2)} \\ y' = \dfrac{y}{1-2ax-a^2(t^2-x^2-y^2)} \\ u' = \sqrt{1-2ax-a^2(t^2-x^2-y^2)}\cdot u \end{cases}$

Заметим, что классическое преобразование инверсии $G_{инверсии}$ в плоскости переменных $R^3(t,x,y)$ имеет вид $\begin{cases} t' = \dfrac{t}{t^2-x^2-y^2} \\ x' = \dfrac{x}{t^2-x^2-y^2} \\ y' = \dfrac{y}{t^2-x^2-y^2} \end{cases}$ и определено для всех $(t,x,y)$, не лежащих на световом конусе $t^2 = x^2 + y^2$. Наше преобразование типа “преобразования инверсии” с оператором $X_8$ состоит из композиции трех последовательных преобразований: преобразование инверсии $G_{инверсии}$+сдвиг по координате $x$ на величину $a$+преобразование инверсии $G_{инверсии}$ и определено для всех $(t,x,y)$.

$X_9 = 2yt\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 - x^2 + t^2)\partial_y - yu\partial_u$ - оператор типа “преобразования инверсии” аналогичный $X_8$

$X_{10} = (x^2 + y^2 + t^2)\partial_t + 2xt\partial_x + 2yt\partial_y - tu\partial_u$ - оператор типа “преобразования инверсии” аналогичный $X_8$

$X_{11} = u\partial_u$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия” только одной зависимой переменной $u$: $\begin{cases} t' = t \\ x' = x \\ y' = y \\ u' = e^a u \end{cases}$. Этот оператор обязан своим существованием свойству линейности волнового уравнения.

$X_{12} = \alpha(t,x,y)\partial_u$, где $\alpha(t,x,y)$ - произвольное решение волнового уравнения (11.1.1) - оператор, также порожденный свойством линейности волнового уравнения:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x \\ y' = y \\ u' = u + a\cdot\alpha(t,x,y) \end{cases}$$

Заметим также, что во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

## 11.2 Модель идеальной несжимаемой жидкости
(Система уравнений Эйлера для плоского случая в декартовой системе координат)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (11.2.1)$$

где компоненты вектора скорости $u = u(t,x,y)$, $v = v(t,x,y)$, давление $p = p(t,x,y)$, плотность $\rho = const$, т. е. жидкость считается однородной. Не нарушая общности рассмотрения, можно принять постоянную величины плотности $\rho = 1$.
Допускаемая группа точечных преобразований является бесконечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли операторов состоит из операторов:

$X_1 = \partial_t$ - оператор сдвига по времени: $(t', x', y', u', v', p') = (t + a, x, y, u, v, p)$

$X_2(\alpha) = \alpha(t)\partial_x + \dfrac{d\alpha}{dt}\partial_u - \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}x\partial_p$ - оператор сдвига по координате $x$ (переход в неинерциальную систему координат, движущуюся по закону $x' = x + a\alpha(t), y' = y$):

$$(t', x', y', u', v', p') = (t, x + a\alpha, y, u + a\frac{d\alpha}{dt}, v, p - \frac{a^2}{2}\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} - a\frac{d^2\alpha}{dt^2}x)$$

$X_3(\beta) = \beta(t)\partial_y + \dfrac{d\beta}{dt}\partial_v - \dfrac{d^2\beta}{dt^2}y\partial_p$ - оператор сдвига по координате $y$ (переход в неинерциальную систему координат, движущуюся по закону $x' = x, y' = y + a\beta(t)$):

$$(t', x', y', u', v', p') = (t, x, y + a\beta, u, v + a\frac{d\beta}{dt}, p - \frac{a^2}{2}\beta\frac{d^2\beta}{dt^2} - a\frac{d^2\beta}{dt^2}y)$$

Заметим, что выбор функции $\alpha(t) = 1$ (соответственно $\beta(t) = 1$) дает преобразование простого сдвига по координате $x$ (соответственно $y$); выбор $\alpha(t) = t$ (соответственно $\beta(t) = t$) дает преобразование Галилеева сдвига по координате $x$ (соответственно $y$).

$X_4 = y\partial_x - x\partial_y + u\partial_v - v\partial_u$ - оператор вращения в плоскостях

$$R^2(x,y)+R^2(u,v):\begin{cases} t' = t \\ x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \\ u' = u\cos a + v\sin a \\ v' = v\cos a - u\sin a \\ p' = p \end{cases}$$

$X_5 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = e^a t \\ x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = u \\ v' = v \\ p' = p \end{cases}$

$X_6 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - 2p\partial_p$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = e^a t \\ x' = x \\ y' = y \\ u' = e^{-a} u \\ v' = e^{-a} v \\ p' = e^{-2a} p \end{cases}$

$X_7(\sigma) = \sigma(t)\partial_p$ - оператор, порождающий преобразование переменных, вида: $(t', x', y', u', v', p') = (t, x, y, u, v, p + a\sigma(t))$, где $\sigma(t)$ - произвольная функция времени, и являющийся следствием того факта, что давление определяется системой (11.2.1) с точностью до произвольной функции времени.

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

Продемонстрируем применение формул производства решений для системы уравнений Эйлера на примере преобразований, индуцируемых операторами $X_2(\alpha)$ и $X_6$.

Пусть $u = f(t,x,y),\ v = g(t,x,y),\ p = \varphi(t,x,y)$ - известное решение системы (11.2.1), тогда решениями также являются:

$$X_2(\alpha):\begin{cases} u' = f(t, x - a\alpha(t), y) + a\dfrac{d\alpha}{dt} \\ v' = g(t, x - a\alpha(t), y) \\ p' = \varphi(t, x - a\alpha(t), y) + \dfrac{a^2}{2}\alpha\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - a\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}x \end{cases}$$

$$X_6:\begin{cases} u' = e^a f(e^a t, x, y) \\ v' = e^a g(e^a t, x, y) \\ p' = e^{2a}\varphi(e^a t, x, y) \end{cases}$$

Аналогично могут быть применены формулы производства решений для получения новых решений системы уравнений Эйлера при помощи преобразований, индуцируемых остальными операторами допускаемой алгебры Ли.

11.3 Модель Навье - Стокса линейно-вязкой несжимаемой жидкости
(Система уравнений Навье - Стокса для плоского случая в декартовой системе координат)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (11.3.1)$$

где компоненты вектора скорости $u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y)$, давление $p = p(t, x, y)$, плотность $\rho = const$, т. е. жидкость считается однородной, коэффициент динамической вязкости $\mu = const$. Не нарушая общности рассмотрения, можно принять $\rho = 1$, $\mu = 1$.

Отметим интересную особенность системы (1.13.1), связанную с ее неэволюционным характером. Для этого получим следующие дифференциальные следствия из третьего уравнения системы (1.13.1) (условия несжимаемости):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = 0 \qquad (11.3.2)$$

Тогда из первых двух уравнений (1.13.1) (уравнений движения в проекции на оси $x$, $y$) с использованием полученных дифференциальных следствий (11.3.2) следует:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (11.3.3)$$

Наличие уравнений (11.3.2) и (11.3.3) дает новые дополнительные связи на часть вторых производных, участвующих в уравнениях (11.3.2) и (11.3.3). Эти вторые производные уже нельзя будет считать независимыми переменными при реализации алгоритма построения алгебры Ли операторов (в ходе расщепления определяющих уравнений). Поэтому, вообще говоря, реализация алгоритма построения алгебры Ли операторов применительно к совокупности уравнений (11.3.1) – (11.3.3) должна привести к сужению допускаемой группы по сравнению с исходной системой (11.3.1). Однако реализация алгоритма построения алгебры Ли операторов применительно к системе уравнений Навье – Стокса (11.3.1) к такому сужению допускаемой группы не приводит, что можно отнести к случаю редкого исключения.

Допускаемая системой уравнений Навье – Стокса группа точечных преобразований является бесконечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли операторов состоит из следующих операторов (часть этих операторов допускается системой уравнений Эйлера (11.2.1):

$X_1 = \partial_t$ - оператор сдвига по времени: $(t', x', y', u', v', p') = (t + a, x, y, u, v, p)$

$X_2(\alpha) = \alpha(t)\partial_x + \dfrac{d\alpha}{dt}\partial_u - \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} x\partial_p$ - оператор сдвига по координате $x$ (переход в неинерциальную систему координат, движущуюся по закону $x' = x + a\alpha(t), y' = y$):

$$(t', x', y', u', v', p') = (t, x + a\alpha, y, u + a\frac{d\alpha}{dt}, v, p - \frac{a^2}{2}\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} - a\frac{d^2\alpha}{dt^2}x)$$

$X_3(\beta) = \beta(t)\partial_y + \dfrac{d\beta}{dt}\partial_v - \dfrac{d^2\beta}{dt^2} y\partial_p$ - оператор сдвига по координате $y$ (переход в неинерциальную систему координат, движущуюся по закону $x' = x, y' = y + a\beta(t)$):

$$(t', x', y', u', v', p') = (t, x, y + a\beta, u, v + a\frac{d\beta}{dt}, p - \frac{a^2}{2}\beta\frac{d^2\beta}{dt^2} - a\frac{d^2\beta}{dt^2}y)$$

Заметим, что выбор функции $\alpha(t) = 1$ (соответственно $\beta(t) = 1$) дает преобразование простого сдвига по координате $x$ (соответственно $y$); выбор $\alpha(t) = t$ (соответственно $\beta(t) = t$) дает преобразование Галилеева сдвига по координате $x$ (соответственно $y$).

$X_4 = y\partial_x - x\partial_y + u\partial_v - v\partial_u$ - оператор вращения в плоскостях

$$R^2(x, y) + R^2(u, v): \begin{cases} t' = t \\ x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \\ u' = u\cos a + v\sin a \\ v' = v\cos a - u\sin a \\ p' = p \end{cases}$$

$X_5 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u - v\partial_v - 2p\partial_p$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”:

$$\begin{cases} t' = e^{2a}t \\ x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = e^{-a}u \\ v' = e^{-a}v \\ p' = e^{-2a}p \end{cases}$$

$X_6(\sigma) = \sigma(t)\partial_p$ -оператор, порождающий преобразование переменных, вида: $(t', x', y', u', v', p') = (t, x, y, u, v, p + a\sigma(t))$, где $\sigma(t)$ - произвольная функция времени, и являющийся следствием того факта, что давление определяется системой (11.3.1) с точностью до произвольной функции времени.

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

11.4 Модель Прандтля пограничного слоя линейно-вязкой несжимаемой жидкости (Система уравнений пограничного слоя для плоского случая в декартовой системе координат)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (11.4.1)$$

где компоненты вектора скорости $u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y)$, давление $p = p(t, x, y)$, плотность $\rho = const$, т. е. жидкость считается однородной, коэффициент динамической вязкости $\mu = const$. Не нарушая общности рассмотрения, можно принять $\rho = 1,\ \mu = 1$.

Допускаемая системой уравнений пограничного слоя группа точечных преобразований является бесконечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли операторов состоит из следующих операторов (часть этих операторов допускается системами уравнений Эйлера (11.2.1) и Навье - Стокса (11.3.1)):

$X_1 = \partial_t$ - оператор сдвига по времени: $(t', x', y', u', v', p') = (t + a, x, y, u, v, p)$

$X_2(\alpha) = \alpha(t)\partial_x + \dfrac{d\alpha}{dt}\partial_u - \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}x\partial_p$ - оператор сдвига по координате $x$ (переход в неинерциальную систему координат, движущуюся по закону $x' = x + a\alpha(t), y' = y$):

$$(t', x', y', u', v', p') = (t, x + a\alpha, y, u + a\frac{d\alpha}{dt}, v, p - \frac{a^2}{2}\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} - a\frac{d^2\alpha}{dt^2}x)$$

Заметим, что выбор функции $\alpha(t) = 1$ дает преобразование простого сдвига по координате $x$; выбор $\alpha(t) = t$ дает преобразование Галилеева сдвига по координате $x$.

$X_3 = 2t\partial_t + y\partial_y - 2u\partial_u - v\partial_v - 4p\partial_p$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = e^{2a}t \\ x' = x \\ y' = e^{a}y \\ u' = e^{-2a}u \\ v' = e^{-a}v \\ p' = e^{-4a}p \end{cases}$

$X_4 = x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p$-оператор преобразования “растяжения-сжатия”:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = e^{a}x \\ y' = y \\ u' = e^{a}u \\ v' = v \\ p' = e^{2a}p \end{cases}$$

$X_5(\sigma) = \sigma(t)\partial_p$-оператор, порождающий преобразование переменных, вида: $(t', x', y', u', v', p') = (t, x, y, u, v, p + a\sigma(t))$, где $\sigma(t)$ - произвольная функция времени, и являющийся следствием того факта, что давление определяется системой (11.4.1) с точностью до произвольной функции времени.

$X_6(\lambda) = \lambda(t,x)\partial_y + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + u\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\partial_v$ -оператор, порождающий преобразование переменных, вида: $(t', x', y', u', v', p') = (t, x, y + a\lambda(t,x), u, v + a\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + u\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right), p)$, где $\lambda(t,x)$ - произвольная функция своих аргументов.

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

11.5 Модель сжимаемого невязкого нетеплопроводного газа
(Система уравнений газовой динамики для плоского случая в декартовой системе координат)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + u\dfrac{\partial p}{\partial x} + v\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \qquad (11.5.1)$$

где компоненты вектора скорости $u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y)$, давление $p = p(t, x, y)$, плотность $\rho = \rho(t, x, y)$, скорость звука $c = c(t, x, y)$. Произведение $\rho c^2$ в модели газовой динамики считается заданной функцией переменных $\rho$, $p$, т. е.

$$\rho c^2 = f(\rho, p) \qquad (11.5.2)$$

Допускаемая группа точечных преобразований является конечномерной, но ее размерность существенно зависит от вида функции $f(\rho, p)$.

Если функция $f(\rho, p)$ является функцией общего вида, то соответствующая этому случаю алгебра Ли операторов $L_7$ состоит из 7 операторов:

$X_1 = \partial_t$ - оператор сдвига по времени: $(t', x', y', u', v', p', \rho') = (t + a, x, y, u, v, p, \rho)$

$X_2 = \partial_x$ - оператор переноса (сдвига) по координате $x$: $(t', x', y', u', v', p', \rho') = (t, x + a, y, u, v, p, \rho)$

$X_3 = \partial_y$ - оператор переноса (сдвига) по координате $y$: $(t', x', y', u', v', p', \rho') = (t, x, y + a, u, v, p, \rho)$

$X_4 = t\partial_x + \partial_u$ - оператор Галилеева переноса (сдвига) по координате $x$: $(t', x', y', u', v', p', \rho') = (t, x + at, y, u + a, v, p, \rho)$

$X_5 = t\partial_y + \partial_v$ - оператор Галилеева переноса (сдвига) по координате $y$: $(t', x', y', u', v', p', \rho') = (t, x, y + at, u, v + a, p, \rho)$

$X_6 = y\partial_x - x\partial_y + u\partial_v - v\partial_u$ - оператор вращения в плоскостях

$$R^2(x,y) + R^2(u,v): \begin{cases} t' = t \\ x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \\ u' = u\cos a + v\sin a \\ v' = v\cos a - u\sin a \\ p' = p \\ \rho' = \rho \end{cases}$$

$X_7 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$ - оператор преобразования "растяжения-сжатия":

$$\begin{cases} t' = e^a t \\ x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = u \\ v' = v \\ p' = p \\ \rho' = \rho \end{cases}$$

Если функция $f(\rho, p) = \gamma p$ (т. е. $c^2 = \dfrac{\gamma p}{\rho}$ и, следовательно, газ является политропным, где $\gamma$ - показатель адиабаты), то к уже найденной алгебре Ли операторов $L_7$ добавляются 2 новых оператора "растяжения-сжатия":

$X_8 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2p\partial_p$ - оператор преобразования "растяжения-сжатия":

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = e^a u \\ v' = e^a v \\ p' = e^{2a} p \\ \rho' = \rho \end{cases}$$

$X_9 = p\partial_p + \rho\partial_\rho$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = t \\ x' = x \\ y' = y \\ u' = u \\ v' = v \\ p' = e^a p \\ \rho' = e^a \rho \end{cases}$

Оказывается, что, если в выражении для функции $f(\rho, p) = \gamma p$, показатель адиабаты $\gamma = \dfrac{N+2}{N}$, где $N$ - размерность физического пространства, то к уже найденной алгебре Ли операторов $L_9$ добавляется еще один новый оператор:

$X_{10} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - (tu - x)\partial_u - (tv - y)\partial_v - 5tp\partial_p - 3t\rho\partial_\rho$ - оператор, которому соответствует преобразование: $\begin{cases} t' = \dfrac{t}{1-at} \\ x' = \dfrac{x}{1-at} \\ y' = \dfrac{y}{1-at} \\ u' = u + a(x - tu) \\ v' = v + a(y - tv) \\ p' = (1-at)^5 p \\ \rho' = (1-at)^3 \rho \end{cases}$

Оператор $X_{10}$ имеет место быть для $\gamma = \dfrac{N+2}{N}$, где $N$ - размерность физического пространства, т.е. для $\gamma = \dfrac{5}{3}$ в случае пространственных течений, для $\gamma = 2$ в случае плоскопараллельных течений и для $\gamma = 3$ в случае одномерных течений с плоскими волнами.

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

### 11.6 Динамическая модель линейно-упругого тела
(Система уравнений Ляме для плоского случая в декартовой системе координат)

В векторном виде система имеет вид: $\rho \dfrac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) grad(div(\vec{w})) + \mu\Delta(\vec{w})$

или в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\mu \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \qquad (11.6.1)$$

где компоненты вектора перемещений $\vec{w} = (u(t,x,y), v(t,x,y))$, плотность $\rho = const$, коэффициенты Ляме $\lambda = const$, $\mu = const$.

Допускаемая системой уравнений Ляме группа точечных преобразований является бесконечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли операторов состоит из следующих операторов:

$X_1 = \partial_t$ - оператор сдвига по времени: $(t', x', y', u', v') = (t + a, x, y, u, v)$

$X_2 = \partial_x$ - оператор переноса (сдвига) по координате $x$: $(t', x', y', u', v') = (t, x + a, y, u, v)$

$X_3 = \partial_y$ - оператор переноса (сдвига) по координате $y$: $(t', x', y', u', v') = (t, x, y + a, u, v)$

$X_4 = y\partial_x - x\partial_y + u\partial_v - v\partial_u$ - оператор вращения в плоскостях

$$R^2(x,y) + R^2(u,v): \begin{cases} t' = t \\ x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \\ u' = u\cos a + v\sin a \\ v' = v\cos a - u\sin a \end{cases}$$

$X_5 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = e^a t \\ x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = u \\ v' = v \end{cases}$

$X_6 = u\partial_u + v\partial_v$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} t' = t \\ x' = x \\ y' = y \\ u' = e^a u \\ v' = e^a v \end{cases}$

$X_7 = U(t,x,y)\partial_u + V(t,x,y)\partial_v$ -оператор преобразования вида

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x \\ y' = y \\ u' = u + aU(t,x,y) \\ v' = v + aV(t,x,y) \end{cases},$$

где $U(t,x,y), V(t,x,y)$ - произвольное решение системы (11.6.1). Этот оператор отражает свойство линейности системы уравнений (11.6.1).

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

11.7 Модель квазистационарных течений пластического несжимаемого материала, удовлетворяющего условию пластичности Мизеса

(Система уравнений Мизеса для плоского случая в декартовой системе координат)

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнения Мизеса имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{xy}}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{yy}}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ S_{xx} + S_{yy} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ (S_{xx})^2 + (S_{yy})^2 + 2(S_{xy})^2 = 2k_s^2 \\ S_{xx} = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x},\ S_{xy} = \dfrac{1}{2}\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right),\ S_{yy} = \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{11.7.1}$$

где компоненты вектора скорости $\vec{w} = (u(x,y), v(x,y))$, плотность $\rho = const$, коэффициент сдвиговой вязкости $\lambda = const > 0$ в законе текучести $S_{xx} = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}, S_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), S_{yy} = \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y}$,

компоненты девиатора тензора напряжений $S_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij}$, где $\sigma_{ij}$ - компоненты тензора напряжений, $P(x,y) = -\dfrac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$ - гидростатическое давление. Величина $k_s$ - предел текучести при чистом сдвиге в условии текучести Мизеса.

Допускаемая системой уравнений (11.7.1) группа точечных преобразований является конечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли операторов состоит из следующих операторов:

$X_1 = \partial_x$ - оператор переноса (сдвига) по координате $x$: $(x', y', u', v', P') = (x + a, y, u, v, P)$

$X_2 = \partial_y$ - оператор переноса (сдвига) по координате $y$: $(x', y', u', v', P') = (x, y + a, u, v, P)$

$X_3 = y\partial_x - x\partial_y + u\partial_v - v\partial_u$ - оператор вращения в плоскостях

$$R^2(x, y) + R^2(u, v): \begin{cases} x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \\ u' = u\cos a + v\sin a \\ v' = v\cos a - u\sin a \\ P' = P \end{cases}$$

$X_4 = \partial_u$ - оператор переноса (сдвига) по переменной $u$: $(x', y', u', v', P') = (x, y, u + a, v, P)$

$X_5 = \partial_v$ - оператор переноса (сдвига) по переменной $v$: $(x', y', u', v', P') = (x, y, u, v + a, P)$

$X_6 = \partial_P$ - оператор переноса (сдвига) по переменной $P$: $(x', y', u', v', P') = (x, y, u, v, P + a)$

$X_7 = y\partial_u - x\partial_v$ - оператор преобразования вида $(x', y', u', v', P') = (x, y, u + ay, v - ax, P)$

$X_8 = x\partial_x + y\partial_y$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} x' = e^a x \\ y' = e^a y \\ u' = u \\ v' = v \\ P' = P \end{cases}$

$X_9 = u\partial_u + v\partial_v$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ u' = e^a u \\ v' = e^a v \\ P' = P \end{cases}$

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a \in R^1$ - это групповой параметр.

11.8 Модель пластического материала, удовлетворяющего условию пластичности Треска

(Система квазистатических уравнений Треска для плоского случая в декартовой системе координат)

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнения Треска имеют вид

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y})=-\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+v(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y})=-\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ u^2+v^2=1 \end{cases} \qquad (11.8.1)$$

где компоненты вектора скорости $\vec{w}=(u(x,y),v(x,y))$, гидростатическое давление $P=P(x,y)$.

Допускаемая системой уравнений (11.8.1) группа точечных преобразований является конечномерной. Соответствующая ей алгебра Ли операторов состоит из следующих операторов:

$X_1=\partial_x$ - оператор переноса (сдвига) по координате $x$: $(x',y',u',v',P')=(x+a,y,u,v,P)$

$X_2=\partial_y$ - оператор переноса (сдвига) по координате $y$: $(x',y',u',v',P')=(x,y+a,u,v,P)$

$X_3=y\partial_x-x\partial_y+u\partial_v-v\partial_u$ - оператор вращения в плоскостях

$$R^2(x,y)+R^2(u,v):\begin{cases} x'=x\cos a+y\sin a \\ y'=y\cos a-x\sin a \\ u'=u\cos a+v\sin a \\ v'=v\cos a-u\sin a \\ P'=P \end{cases}$$

$X_4=\partial_P$ - оператор переноса (сдвига) по переменной $P$: $(x',y',u',v',P')=(x,y,u,v,P+a)$

$X_5=x\partial_x+y\partial_y$ - оператор преобразования “растяжения-сжатия”: $\begin{cases} x'=e^a x \\ y'=e^a y \\ u'=u \\ v'=v \\ P'=P \end{cases}$

Как и ранее, во всех приведенных преобразованиях $a\in R^1$ - это групповой параметр.

*Приложение 2*

*Формулы вычисления преобразований производных 1-го порядка при точечных преобразованиях*

1. Одна функция $y = y(x)$ одной переменной $x$:

$$\left.\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,u) \end{array}\right\rangle > \begin{array}{l} \dfrac{dx'}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = (1) \\ \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\cdot 1 + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = (2) \end{array} \Rightarrow .$$

Но $y' = y'(x') \Rightarrow (2) = \dfrac{dy'(x')}{dx} = \dfrac{dy'}{dx'}\dfrac{dx'}{dx} = \dfrac{dy'}{dx'}\cdot(1)$

$$\Rightarrow \frac{dy'}{dx'} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}.$$

2. Одна функция $y = y(t,x)$ двух переменных $t,x$:

$$\left.\begin{array}{l} t' = \varphi(t,x,y) \\ x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \end{array}\right\rangle > \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial t'}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = (1) \\ \dfrac{\partial x'}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = (2) \\ \dfrac{\partial y'}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = (3) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial t'}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} = (4) \\ \dfrac{\partial x'}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} = (5) \\ \dfrac{\partial y'}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} = (6) \end{array}\right.$$

Но $y' = y'(t',x') \Rightarrow$

$$(3) = \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial y'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial y'}{\partial t'}\cdot(1) + \frac{\partial y'}{\partial x'}\cdot(2)$$

$$(6) = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial t'}\cdot(4) + \frac{\partial y'}{\partial x'}\cdot(5)$$

Решая линейную алгебраическую систему уравнений 2 на 2:

$$\frac{\partial y'}{\partial t'}=\frac{(2)\cdot(6)-(5)\cdot(3)}{(2)\cdot(4)-(5)\cdot(1)}=\frac{\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial x}}{\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial x}-\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x'}=\frac{(3)\cdot(4)-(6)\cdot(1)}{(2)\cdot(4)-(5)\cdot(1)}=\frac{\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial x}-\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial x}}{\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial x}-\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial x}}$$

*Формулы продолжения точечных преобразований*
*(альтернативный вывод)*

Рассмотрим однопараметрическую группу G преобразований:

$$\begin{array}{l} x' = f(x,u,a), \quad f(x,u,a)\big/_{a=0} = x \\ u' = \varphi(x,u,a), \quad \varphi(x,u,a)\big/_{a=0} = u \end{array} \quad (1).$$

В пространстве $R^{n+m}(x,u)$ где $x=(x^1,...x^n), u=(u^1,...,u^m)$.

Введем дополнительные переменные $\underset{1}{u}=\{u_i^\alpha\}$,

где $\alpha = 1\div m, i=1\div n$,

и зададим их преобразования формулами так, чтобы:

а) $u_i'^\alpha = \psi_i^\alpha(x,u,\underset{1}{u},a), \quad \psi_i^\alpha(x,u,\underset{1}{u},a)\Big/_{a=0} = u_i^\alpha$ (2)

б) эти формулы (2) и преобразования производных $\dfrac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}$ при замене переменных (1)

были согласованы с равенствами: $u_i^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}, \quad u_i'^\alpha = \dfrac{\partial u'^\alpha(x')}{\partial x'^i}$

для любой гладкой функции $u^\alpha = u^\alpha(x)$.

Этим условием б) формулы преобразования (2) однозначно определяются для любой группы $G$, и в результате получается однопараметрическая группа $\underset{1}{G}$ преобразований (1)+(2) в пространстве $R^{n+m+nm}$ переменных $(x,u,\underset{1}{u})$. При этом преобразования (1) называются «точечными преобразованиями», (2) называются «первым продолжением этих точечных преобразований», группа $\underset{1}{G}$ - «первым продолжением» группы $G$.

Запишем инфинитезимальный оператор алгебры Ли нашей группы $G$:

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \text{ где } \begin{array}{l} \xi^i = \dfrac{\partial f^i}{\partial a}\Big/_{a=0} \\ \eta^\alpha = \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a}\Big/_{a=0} \end{array} \quad (4)$$

Тогда оператор продолженной группы $\underset{1}{G}$ равен: $\underset{1}{X} = X + \zeta_i^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$, где $\zeta_i^\alpha = \dfrac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial a}\Big/_{a=0}$.

Дополнительные координаты $\zeta_i^\alpha$ этого оператора подлежат определению из условия согласования формул (2) с равенствами (3). С помощью величины $\omega = (\omega^1,...,\omega^m)$, где $\omega^\alpha = du^\alpha - u_i^\alpha dx^i$, равенства (3) переписываются в виде: $\omega = 0$ и $\omega' = 0$ (7).

Условия согласования формул преобразований (1), (2) с (3) (т.е. условия согласования, накладываемые на продолжение) означают, что уравнение (7) задает инвариантное многообразие относительно группы $\underset{1}{G}$ преобразований (1), (2) и

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}du^\alpha, \quad du' = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}du^\alpha$$

в пространстве переменных $(x, u, \underset{1}{u}, dx, du)$.

С помощью инфинитезимального оператора

$\widetilde{X} = \underset{1}{X} + \widetilde{\xi}^i(x,u)\frac{\partial}{\partial dx^i} + \widetilde{\eta}^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial du^\alpha}$ группы $\underset{1}{\widetilde{G}}$,

где

$$\widetilde{\xi} = \frac{\partial dx'}{\partial a}\Big/_{a=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial \xi}{\partial u^\alpha}du^\alpha$$

$$\widetilde{\eta} = \frac{\partial du'}{\partial a}\Big/_{a=0} = \frac{\partial \eta}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial \eta}{\partial u^\alpha}du^\alpha$$

критерий инвариантности уравнений (7) записывается в виде:

$$\widetilde{X}(\omega^\alpha)\Big/_{\omega=0} = (\widetilde{\eta}^\alpha - u_i^\alpha \widetilde{\xi}^i - \zeta_i^\alpha dx^i)\Big/_{\omega=0} = 0, \alpha = 1 \div m.$$

Подставим в эти уравнения выражения для $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$, получим:

$$\left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^j}du^j - u_i^\alpha\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta\right) - \zeta_i^\alpha dx^i\right)\Big/_{du^\alpha - u_i^\alpha dx^i = 0} = 0, \alpha = 1 \div m$$

Разрешая эту систему уравнений относительно $\zeta_i^\alpha$, получим

$$\zeta_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta^\alpha) + u_i^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}(\eta^\alpha) - u_j^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^j) + u_i^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}(\xi^j)\right)$$

или в сокращенном виде:

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j) \quad (8)$$

где $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ – оператор полного дифференцирования по переменной $x^i$.

Аналогично строятся продолжения более высокого порядка. Например, для второго продолжения оператор имеет вид: $\underset{2}{X} = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}$ для группы $\underset{2}{G}$,

где $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k)$,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}$$

где $\xi^k(x,u), \eta^\alpha(x,u), \zeta_i^\alpha(x,u,\underset{1}{u}), \zeta_{ij}^\alpha(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u})$.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*


1. Биркгоф Г. Гидродинамика. – М.: ИЛ, 1954 г.
2. Овсянников Л.В. «Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений». ДАН СССР, 1958, т. 118, № 3, с. 439-442.
3. Овсянников Л.В. «Групповые свойства дифференциальных уравнений». – Новосибирск, изд-во СОАН СССР, 1962 г.
4. Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х. «Групповой анализ дифференциальных уравнений механики». – Итоги науки и техники / Серия «Общая механика», т. 2. – М.: ВИНИТИ, 1975, с. 5-52.
5. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.:Наука, 1978 г.
6. Овсянников Л.В. «Лекции по основам газовой динамики». – Новосибирск, «Наука», 1981 г.
7. Ибрагимов Н.Х. «Группы преобразований в математической физике». – М.: «Наука», 1983.
8. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И. «Групповые свойства уравнений упругости и пластичности». – Новосибирск, «Наука», 1985, 143 с.
9. Ибрагимов Н.Х. «Азбука группового анализа». – М.: «Знание», серия "Математика, Кибернетика", № 8, 1989 г, 48 с.
10. Ибрагимов Н.Х. «Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений». – М.: «Знание», серия "Математика, Кибернетика", № 7, 1991 г, 48 с.
11. Сенашов С.И. Основы группового анализа для механиков. – Красноярск, изд-во Красноярского университета, 1993 г., 152 с.